Ecole Nationale des Sciences
Appliquées de Tétouan
(ENSATE)

Année Universitaire: 2014-2015

Probabilités, Statistique et Calcul Stochastique

Prof. Mohamed El Merouani
e-mail: m_merouani@yahoo.fr
Site Web: elmerouani.jimdo.com

Programme

- Probabilités et Statistique :
  - Espaces probabilisés
  - Variables aléatoires discrètes et continues
  - Lois usuelles discrètes et continues
  - Convergences stochastiques
  - Approximations des lois
  - Echantillonnage et Estimation
  - Tests statistiques

Programme

- Calcul Stochastique:
  - Processus Stochastiques discrets: Chaînes de Markov.
  - Processus Stochastiques continus: Processus de Poisson, Processus de comptage.
  - Phénomène d'attente: Système M/M/1, Processus de naissance et de mort, Système M/M/s.
  - Mouvement Brownien, Processus d'Itô.
  - Equations Différentielles Stochastiques.

Espaces Probabilisés

Expérience aléatoire

- On appelle expérience aléatoire une certaine action que si l'on répète plusieurs fois dans des conditions identiques, elle aura plusieurs résultats possibles.
- On peut distinguer les cas possibles des cas favorables, c'est-dire des cas que l'on veut obtenir.

Ensemble fondamental

- L'ensemble de tous les résultats possibles, pour une expérience aléatoire, est appelé ensemble fondamental .
- On le note Ω.
- Un élément ω de Ω est appelé résultat élémentaire.

Evénement

- Un événement est un résultat possible d'une expérience aléatoire.
- On dit que cet événement est aléatoire lorsque sa réalisation est soumise au hasard.
- **Exemples**:
  - Obtenir 5 en lançant un dé
  - Amener face en lançant une pièce de monnaie,…

Notation ensembliste

- Un événement doit toujours être défini avec précision.
- Les événements sont des parties (des sous-ensembles) de Ω, sont notés A, B, C,…

Exemple:

- On lance un dé. L'événement A={Le numéro 5 apparaît} est dit élémentaire (A={5}).
- L'événement B={Un nombre impair apparaît} est un événement composé (B={1,3,5}).

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- Un événement est dit certain s'il arrive nécessairement. On l'identifie en tant que sous-ensemble de Ω, à Ω.
- Un événement est dit impossible s'il n'arrive jamais. On l'identifie au sous-ensemble vide $\emptyset$ de Ω.
- Un événement A implique un événement B si chaque fois que A est réalisé, B est réalisé. Cela se traduit par la relation d'inclusion

$$A \subset B$$

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- Le contraire d'un événement A (« non A ») est l'événement noté $\overline{A} = \Omega - A$ qui est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
- L'événement « A et B » est l'événement qui est réalisé si A et B sont simultanément réalisé. On le note $A \cap B$. En tant que sous-ensemble de Ω c'est l'intersection de A et B.

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- L'événement « A ou B » est l'événement qui est réalisé si et seulement si l'un au moins des deux événements A ou B est réalisé. En tant que sous-ensemble de Ω c'est la réunion $A \bigcup B$ de A et B.
- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent être réalisés simultanément, c'est-à-dire $A \bigcap B = \varnothing$

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- Un événement élémentaire est un événement de la forme $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$.
- $\{\omega\}$ est un sous-ensemble de Ω alors que ω est un élément de Ω.
- L'ensemble d'événements incompatibles $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tel que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous les i,j=1,2,…,n. (i≠j) est appelé système complet d'événements.

Espace probabilisable

- Soit une expérience aléatoire. On peut identifier un événement aléatoire A avec une partie de Ω dont les éléments réalisent A.

- L'ensemble de tous les événements est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω, c'est-à-dire $\mathscr{P}(\Omega)$.

Tribu ou σ-algèbre

- Une classe $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu (ou σ-algèbre) si:

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. Si $A \in \mathscr{A}$, Alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$, $(\overline{A} = \Omega - A)$
3. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ s'appelle espace probabilisable.

Proposition 1

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. On a:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$
2. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.
3. Si $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{A}$, alors $A\text{-}B \in \mathscr{A}$ et $A\Delta B \in \mathscr{A}$.

Démonstration

1. On a $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathscr{A}$ (définition d'une tribu).
2. On a $\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$

   Comme $A_i \in \mathscr{A}$, $\overline{A_i} \in \mathscr{A}$ et $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \in \mathscr{A}$

   D'où $\overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}} \in \mathscr{A}$.
3. Il suffit de remarquer que $A - B = A \cap \overline{B}$ comme $A \in \mathscr{A}$ et $\overline{B} \in \mathscr{A}$, on a $A \cap \overline{B} \in \mathscr{A}$

Démonstration (suite)

De même, puisque $B - A = B \bigcap \overline{A} \in \mathscr{A}$.

On écrit que

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \in \mathscr{A}$$

Exemple:

Au jet de dé à 6 faces on associe Ω={1,2,3,4,5,6}

Soit l'événement A={Le numéro apparu est un multiple de 3}.

On choisit $\mathscr{A}$={Ø;{3,6};{1,2,4,5};Ω}={Ø;A; Ā;Ω}.

On aurait pu aussi choisir $\mathscr{P}$(Ω) .

Définition de Probabilité (Axiomatique)

- A chaque événement A, on voudrait associer une mesure de degré de possibilité de réalisation de l'événement A lorsqu'on effectue une expérience aléatoire.
- Cette mesure sera notée $P(A)$ avec $0 \leq P(A) \leq 1$
- Cette idée nous conduit à la définition suivante:

Définition de Probabilité (Axiomatique)

On appelle probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$ une application P de $\mathscr{A}$ dans [0,1] satisfaisant aux axiomes:

1. $P(\Omega)=1$
2. Pour toute famille $(A_i)_{i\geq 1}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé espace probabilisé ou espace de probabilité.

Proposition 2

1. $P(\emptyset)=0$
2. Pour tout $A\in \mathscr{A}$, $P(\overline{A})=1-P(A)$
3. Pour tout A et $B\in \mathscr{A}$ tels que $A\subset B$, $P(A)\leq P(B)$
4. Pour tous A et $B\in \mathscr{A}$,

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

Démonstration

1. On a $\Omega = \Omega \cup \emptyset$

   Donc $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$

   D'où $P(\emptyset) = 0$

Remarque:

$P(A) = 0$ n'implique pas forcement que $A = \emptyset$

2. On a $\Omega = A \cup \overline{A}$

   d'où $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$

Démonstration (suite)

3. On décompose B en deux événements incompatibles: $B = A \cup (B - A)$

   D'où $P(B)=P(A)+P(B\text{-}A)$

   Comme $P(B\text{-}A) \geq 0$, on a $P(B) \geq P(A)$.

4. On décompose $A \cup B$ en 3 événements incompatibles : $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

   on a $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

   et $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

   D'où $P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$

   $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice

Pour tout A, B, C des sous-ensembles de Ω, calculer la probabilité $P(A \cup B \cup C)$

On trouve:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Formule de Poincaré

Inégalité de Boole

- Pour toute suite d'évènements $(A_i)_{i \geq 1}$, on a:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Exemple 1

- Pour l'expérience du jet de dé, on sait que $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- Chaque face a autant de chances qu'une autre d'apparaître. Il est naturel de supposer que les 6 événements élémentaires {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} ont tous la même probabilité 1/6.
- Si on veut trouver la probabilité de l'événement A={le numéro apparu est un multiple de 3}, on écrit que A={3,6} est la réunion des événements incompatibles {3} et {6} et on a:

  $P(\{3,6\})=P(\{3\})+P(\{6\})=1/6+1/6=1/3$

Définition fréquentielle de la probabilité

- La probabilité P définie sur $(\Omega,\mathscr{A})$; où $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k\}$ est un ensemble fini, est dite uniforme si les probabilités $P(\{\omega_i\})$, $i=1,\ldots,k$ sont égales. Cette probabilité, pour un événement A, vaut

$$P(A)=\frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$$

- On écrit aussi:

$$P(A)=\frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}$$

Remarque:

- On peut supposer que Ω peut être un ensemble **infini dénombrable**: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_i,\ldots\}$
- La probabilité d'un événement se calcule à partir des probabilités des événements élémentaires $P(\{\omega_i\})$ vérifiant $0\leq P(\{\omega_i\})\leq 1$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\{\omega_i\})=1$$

Probabilité conditionnelle:

- Soit un espace probabilisé (Ω, $\mathscr{A}$, P) et un événement A tel que $P(A)>0$.
- On probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A l'application de $\mathscr{A}$ dans [0,1], notée $P(\,\cdot\,/A)$ et définie par:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Justification de l'utilisation de probabilité:

- $0 \leq P(B/A) \leq 1,\ \forall B \in \mathcal{A}$,

On a $(A \cap B) \subset A$ et $P(A \cap B) \leq P(A)$

d'où $0 \leq \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A) \leq 1$

- $P(\Omega / A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

Justification de l'utilisation de probabilité (suite):

- Soit $(B_i)_i$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles, on a:

$$P\left(\bigcup_i B_i / A\right) = \frac{P\left[\left(\bigcup_i B_i\right) \cap A\right]}{P(A)} = \frac{P\left[\bigcup_i (B_i \cap A)\right]}{P(A)}$$

Les événements $(B_i \cap A)$ sont deux à deux incompatibles car

$$(B_i \cap A) \cap (B_j \cap A) = (B_i \cap B_j) \cap A = \emptyset; \quad \forall i \neq j$$

Justification de l'utilisation de probabilité (suite):

d'où:

$$P\left(\bigcup_i B_i / A\right) = \frac{\sum_i P(B_i \cap A)}{P(A)} = \sum_i \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \sum_i P(B_i / A)$$

$P(./A)$ est donc bien une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Remarque:

Analogiquement, on peut définir:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ avec $P(B)>0$

- On déduit alors que

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

et

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

D'où

$$P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Théorème des probabilités composés

Exemple:

- On lance à la fois deux dés. La somme des points obtenus est égale à 8.
- Calculer la probabilité que les deux dés aient donné le même numéro.
- On a $\Omega=\{(i,j)/i,j=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et Card $\Omega=36$.
- Soit l'événement

  $A=\{(i,j)\in\Omega/i+j=8\}=\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

et l'événement $B=\{(i,j)\in\Omega/i=j\}=\{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$

Exemple (suite):

On a $$P(A)=\frac{5}{36}$$

et $$P(A\cap B)=P(\{(4,4)\})=\frac{1}{36}$$

Il vient $$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/36}{5/36}=\frac{1}{5}=0,2$$

On remarque que $$P(B)=\frac{6}{36}=0,167$$

Evénements indépendants:

Définition:

Soit (Ω, $\mathscr{A}$, P) un espace probabilisé.

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si:

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Remarques:

1. Si $P(A)$ et $P(B)$ sont différents de zéro.

   Les événements A et B sont indépendants si la probabilité de réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation ou de la non-réalisation de l'autre,

   c'est-à-dire $P(A/B)=P(A)$ ou $P(B/A)=P(B)$

Remarques:

2. Soient B un événement quelconque et A un événement tel que $P(A)$=0.

- Comme $A \cap B \subset A$, on a $P(A \cap B) = 0$ et $P(A)$. $P(B)$=0, donc les événements A et B sont indépendants.

Remarques:

3. Deux événements incompatibles A et B (avec $P(A)$≠0 et $P(B)$≠0) ne sont pas indépendants.

- En effet, 0<$P(A).P(B)$
  alors que $P(A \cap B) = 0$

Exemple:

- On lance un dé.
- Soient les événements A={2,5}, B={2,4,6} et C={1,2,4}.
- A et B sont indépendants.
- En effet, $P(A\cap B)=P(\{2\})=\frac{1}{6}$ et $P(A).P(B)$=(2/6).(3/6)=1/6
- B et C ne sont pas indépendants.
- En effet, $P(B\cap C)=P(\{2,4\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $P(B)P(C)$=(3/6)(3/6)=1/4≠1/3.

Famille d'événements indépendants:

- Soit (Ω, $\mathscr{A}$, P) un espace probabilisé et soit une famille finie $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'événements.
- Ces événements sont dits **indépendants** (ou **indépendants dans leur ensemble**) si pour toute partie I de l'ensemble {1,2,…,n} on a

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\prod_{i\in I} P(A_i)$$

Remarque:

Des événements indépendants dans leur ensemble, sont indépendants deux à deux, mais des événements indépendants deux à deux ne sont pas toujours indépendants dans leur ensemble.

Exemple 1:

- On lance deux dés.
- On a $\Omega=\{(i,j)/\ i,j=1,2,\ldots,6\}$
- Soit $A=\{(i,j)\in\Omega/i \text{ est impair}\}=\{(i,j)\in\Omega/i=1,3,5\}$,

  $B=\{(i,j)\in\Omega/j \text{ est impair}\}=\{(i,j)\in\Omega/j=1,3,5\}$

  et $C=\{(i,j)\in\Omega/i+j \text{ est impair}\}$

  $=\{(i,j)\in\Omega/i+j=3,5,7,9,11\}$,

  on a $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$

  $P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/4$.

  Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants car $P(AB)= P(A)P(B)$; $P(AC)= P(A)P(C)$ et $P(BC)= P(B)P(C)$;

- Mais les événements A, B et C qui forment la famille (A,B,C) ne sont pas indépendants dans leur ensemble,
- En effet, $P(ABC)=0$

  mais $P(A)P(B)P(C)=1/8$

Exemple 2:

- On lance deux dés.
- Soit $A=\{(i,j)\in\Omega/j=1,3,4\}$,

  $B=\{(i,j)\in\Omega/j=2,3,5\}$

  et $C=\{(i,j)\in\Omega/i+j=9\}$,

  on a $P(A)=P(B)=1/2$, $P(AB)=1/6$, $P(C)=1/9$

  $P(AB)=1/6\neq P(A)P(B)=1/4$.

  Mais $P(ABC)=1/36$ et $P(A)P(B)P(C)=1/36$.

  Cet exemple montre que si pour des événements A,B et C, on a $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$; ceci n'entraîne pas l'indépendance deux à deux de ces événements.

Proposition:

Si A et B sont deux événements indépendants, alors:

1. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration:

1. On a $P(A\cap \overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(A\cap B)$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B})$$

Démonstration (suite):

2. On a $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$
$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)[1-P(A)]$$
$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)P\left(\overline{A}\right)$$
$$=P\left(\overline{A}\right)[1-P(B)]=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)$$

Exercice:

Montrer que tout événement est indépendant de tout événement de probabilité 1.

Formule des probabilités totales:

Soient (Ω, $\mathscr{A}$, P) un espace probabilisé,

$(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements et
B un événement quelconque. On a:

$$P(B)=\sum_i P(B/A_i)\cdot P(A_i)$$

Démonstration:

On a $\bigcup_i A_i=\Omega$ et $A_i\cap A_j=\varnothing$ pour $i\neq j$.

Comme $B=B\cap\Omega=B\cap\left(\bigcup_i A_i\right)=\bigcup_i(B\cap A_i)$

avec $(B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=\varnothing$ pour $i\neq j$, on a

$$P(B)=P\left(\bigcup_i(B\cap A_i)\right)=\sum_i P(B\cap A_i)=\sum_i P(B/A_i)P(A_i)$$

$\blacksquare$

Exemple:

- On considère deux urnes; la première contient 3 boules blanches et 3 noires et la deuxième contient 4 blanches et 2 noires. On choisit l'une des deux urnes au hasard et on tire sans remise 2 boules de cette urne.
- Calculer la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches.

Exemple (solution):

- Soient les événements
- A_i={le tirage se fait de l'urne i}; i=1,2
- et B={les 2 boules tirées sont blanches}. On a

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2} P(B/A_i)P(A_i)=P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)$$

$$=\left(\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}=0{,}3$$

Formule de BAYES:

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé,

$(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements et B un événement tel que $P(B)\neq 0$. On a:

$$P(A_j / B) = \frac{P(B / A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B / A_i)P(A_i)}$$

Démonstration:

On a $\forall\, j,\quad P(A_j / B) = \dfrac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$

Par la formule des probabilités totale, on peut écrire:

$$P(B) = \sum_i P(B / A_i) \cdot P(A_i)$$

D'où

$$P(A_j / B) = \frac{P(B / A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B / A_i)P(A_i)} \quad \blacksquare$$

Exemple:

- On considère trois urnes; la première contient 3 boules blanches et 3 noires, la deuxième contient 4 blanches et 2 noires, la troisième 6 blanches. On choisit l'une des trois urnes au hasard et on tire simultanément 2 boules de cette urne. Sachant que les 2 boules tirées soient blanches, calculer la probabilité qu'elles proviennent de la deuxième urne.

Exemple (solution):

- Soient les événements
  A_i={le tirage se fait de l'urne i}; i=1,2,3
  et B={les 2 boules tirées sont blanches}. On a

$$P(A_2/B)=\frac{P(B/A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B/A_i)P(A_i)}$$

Or $P(A_i)=\frac{1}{3}$, $(\forall i=1,2,3)$

$$P(B/A_1)=\frac{1}{5};P(B/A_2)=\frac{2}{5};\ P(B/A_3)=1$$

On trouve: $P(A_2/B)=0{,}25$

Remarque :

- Les probabilités $P(A_i)$, $P(A_2)$,……,$P(A_n)$ sont les probabilités avant l'expérience aléatoire (elles sont appelées des **probabilités à priori)**.
- Après avoir réalisé l'expérience, supposons qu'il en résulte l'événement B et que l'on connaît ses probabilités conditionnelles $P(B/A_1)$,….,$P(B/A_n)$ (elles sont appelées **des vraisemblances**).
- Le théorème de BAYES nous donne, donc, les probabilités après l'expérience (elles sont appelées des **probabilités à posteriori**) conditionnelles par rapport à l'événement B qui en résulte, $P(A_1/B)$,….,$P(A_n/B)$.