Chapitre 3: Processus Stochastiques

1) Introduction

On a vu dans les chapitres précédents qu'une série temporelle est composée de plusieures composantes dont une est une variable aléatoire. En plus, une série temporelle est caractérisée par son évolution dans le temps, ce qui implique plusieures variables aléatoires évoluant dans le temps.

- Lorsque l'on utilise une série temporelle, il n'est pas raisonable de supposer que la valeur que prend la variable aléatoire dans une période de temps est indépendante des valeurs que prend cette variable dans les périodes antérieures.

- Pour analyser la problématique d'un phénomène de ce type, on utilise la théorie des processus stochastiques.

2) Concept de processus stochastique:

- Un processus stochastique est défini comme une famille de variables aléatoires qui correspondent à des moments successifs du temps. Il sera noté par: $Y(t,u)$ où t est le temps et u est la variable aléatoire.
- Si on fixe $t=t_0$, alors $Y(t_0,u)$ sera une variable aléatoire pareille à celle que nous avons déjà vue.
- Mais, si on fixe $u=u_0$, alors pour chaque moment du temps, le processus prendra une seule valeur $Y(t,u_0)$.

- Si on considère les valeurs qui a pris dans les différents moments du temps, on obtiendra une simple fonction du temps. Cette fonction du temps est aussi appelée une réalisation ou une trajectoire du processus stochastique.
- La détermination des caratéristiques d'un processus stochastique peut se faire de deux façons alternatives, soit à partir des fonctions de distributions conjointes ou à partir des moments.

- Avant d'exposer la première façon, on va examiner brièvement la signification des fonctions de distribution de probabilités d'un processus stochastique:

  Lorsque l'on fixe une valeur dans le temps, le processus stochastique devient une variable aléatoire qui aura sa propre distribution de probabilité.

  Ainsi, pour $t=t_i$, la distribution de probabilité sera notée par $F[Y(t_i)]$.

- Si, au lieu d'une valeur, on fixe deux valeurs du temps, on obtiendra une variable bidimensionnelle avec une fonction de distribution bivariante. Ainsi pour $t=t_i$ et $t=t_j$, la distribution de pobabilité sera $F[Y(t_i), Y(t_j)]$.
- En général, pour un ensemble fini des valeurs du temps, on obtiendra une fonction de distribution conjointe. Ainsi, pour $t_1, t_2, t_3,\ldots, t_n$ la fonction de distribution conjointe sera: $F[Y(t_1), Y(t_2),\ldots, Y(t_n)]$.

- De cette façon, on dit qu'un processus stochastique est parfaitement caractérisé lorsque l'on peut déterminer les fonctions de distribution conjointe pour chaque ensemble fini de variables du processus, c'est-à-dire pour chaque nombre fini "n" de variables aléatoires.

- La détermination des caractéristiques du processus à partir des fonctions de distribution est, en général, une méthode compliquée. Pour cela, on a l'habitude d'utiliser de préférence la méthode des moments.

- Dans une distribution de probabilité, on peut calculer les moments de différents ordres, même si les moments de premier et de second ordre sont les plus utilisés.

- Pour un processus stochastique, que l'on note, pour simplifier la notation , Y_t, la moyenne ou le moment de premier ordre est défini de la forme suivante: $\mu_t = E(Y_t)$

- L'indice t indique que la moyenne sera, en général, différente pour chaque période de temps.

- Comme moments de second ordre par rapport à la moyenne, on considère en plus de la variance, les covariances entre les variables aux différents instants du temps ou autocovariances qui seront définies par:

$$\gamma_{t,s} = Cov(Y_t , Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)]$$

lorsque $s=t$, on obtient la variance:

$$\gamma_{t,t} = Var(Y_t , Y_t) = E[(Y_t - \mu_t)^2]$$

Comme une manière alternative de caractérisation d'un processus stochastique, on utilise aussi les coefficients d'autocorrelation

$$R_{t,s} = \frac{Cov(Y_t , Y_s)}{\sqrt{Var(Y_t) Var(Y_s)}}$$

- Les autocorrelations et les variances ensemble donnent la même information que les autocovariances. Mais, il est préferable d'utiliser les autocorrelations puisqu'elles donnent des mesures relatives, mieux que les autocovariances qui sont affectées par l'échelle utilisée.
- La caractérisation d'un processus stochastique par les moments de premier et de second ordre est, en principe, plus incomplète que lorsqu'elle est faite par les fonctions de distribution.

- Mais si le processus est normal, il sera parfaitement caractérisé par ses deux premiers moments.
- Dans le context des processus stochastiques, comment se conceptualise une série temporelle?
- Même si, dans une série temporelle, on dispose d'une observation pour chaque période du temps, on l'obtient pas en général d'une forme déterministe comme dans le cas d'une fonction exacte du temps.

- Une série temporelle a, en général, un caractère aléatoire, et elle peut être considérée comme un échantillon de taille 1 pris dans des périodes successifs de temps á partir d'un processus aléatoire.

- Dans ce sens, une série temporelle sera considérée comme une réalisation aléatoire d'un processus stochastique.

- Mais, contrairement à l’echantillonnage aléatoire simple où chaque extraction est indépendante des autres, dans une série temporelle la donnée extraite pour une période concrète ne sera pas, en général, indépendante des données extraites pour des périodes antérieures.
- L’information utilisée en économie adopte, dans plusieures cas, la forme d’une série temporelle.

- Ainsi, les agregats de la Comptabilité Nationale, les séries monnaitaires de la Banque de Maroc, la série des Ventes d’une entreprise…etc. viennent sous forme des séries temporelles.

- En économie et, en général, dans les sciences sociales, l’information d’une série s’obtient par observation passive, c’est-à-dire, sans contrôle des facteurs qui influencent sur la variable objet d’étude.

- Par conséquent, même si on dispose d'une série très longue, on doit la considérer toute entière comme une seule réalisation d'un processus stochastique.
- Par exemple, si on considère un indice mensuel des prix à partir de 1800 jusqu'à l'actualité, il ne se sera pas raisonable de supposer qu'à partir d'une date déterminée, par exemple à partir de 1900, commence une seconde réalisation du processus stochastique puisque le context dans lequel se produit l'observation des prix au début du XIX^{ème} siècle est différente du correspondant au début de XX^{ème} siècle.

- Dû au caractère passif de la prise d'informations, en économie, en général, on dispose seulement d'une seule réalisation pour chaque processus stochastique.
- Si, on dispose de n données, alors on doit estimer n moyennes et n variances, sans compter les autocovariances qui sont aussi indisponsables pour caractériser le processus. Autrement dit, le problème est très compliqué.

- Pour pouvoir, à partir d'une seule réalisation, faire inférence sur un processus stochastique, il faut imposer des restrictions à ce drenier. Les restrictions imposer habituellement sont qu'il soit "stationnaire" et "érgodique".

3) Processus stationnaires et érgodiques:

Pour définir un processus stationnaire, on peut utiliser, comme on l'a fait pour sa cactérisation, soit les fonctions de distribution ou alternativement les moments.

- On dit qu'un processus stochastique est stationnaire, au sens strict, lorsque l'on réalise un même déplacement dans le temps de toutes les variables de n'importe quelle distribution conjointe finie, cette distribution ne varie pas.
- Considérons la fonction de distribution conjointe $F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$.
- Si on suppose que l'on déplace tous les éléments de cette distribution de m périodes, la nouvelle fonction de distribution conjointe sera $F(Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \ldots, Y_{t_k+m})$.

- Si le processus est stationnaire, au sens strict, on vérifie que:

  $F(Y_{t_1},Y_{t_2},\ldots, Y_{t_k})= F(Y_{t_1+m},Y_{t_2+m},\ldots, Y_{t_k+m})$.

  et de même, on doit obtenir un résultat analogue pour n'importe quelle autre distribution conjointe finie.
- Aussi dans ce cas, il est plus difficil d'analyser un processus stationnaire à partir des fonctions de distribution que de le faire à partir des moments.

- En utilisant les moments, un processus est dit stationnaire de premier ordre, ou en moyenne, s'il vérifie: $E[Y_t\ ]=\mu \qquad \forall t$
- Par conséquent, dans un processus stationnaire en moyenne, l'espérance mathématique, ou la moyenne théorique, reste constante dans le temps.
- On dit qu'un processus est stationnaire de second ordre (ou au sens large) lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1. La variance est finie et reste constante dans le temps, c'est-à-dire: $E[Y_t - \mu]^2 = \sigma^2 < \infty \qquad \forall t$
2. L'autocovariance entre deux périodes distinctes de temps dépend uniquement de l'intervalle du temps entre ces deux périodes. C'est-à-dire: $E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma_k \qquad \forall t$
   est l'autocovariance d'ordre k, où k est la longueur de cet intervalle de temps entre Y_t et Y_{t+k}.
   Sa valeur γ_k est indépendante de l'instant t du temps que l'on considère.

- Comme on peut remarquer, la variance du processus est tout simplement l'autocovariance d'ordre 0.
- Lors de la définition d'un processus stationnaire au sens large, implicitement, on tient compte de que le processus est aussi stationnaire en moyenne, puisque soit dans la variance soit dans les autocovariances, le symbole μ n'est affecté par aucun indice.
- Si un processus est stationnaire au sens strict, il sera aussi stationnaire au sens large, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie, puisque le processus peut ne pas être stationnaire pour les moments d'ordre supérieures au second.

- Aussi, ici, si le processus est stationnaire au sens large, et en plus il est normal, on vérifie que le processus est stationnaire au sens strict.
- Pour un processus stationnaire les autocorrelations sont définies de la forme suivante: $R_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad k \geq 0$

  et comme

  $$E\left[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)\right] = \gamma_k \qquad \forall t \geq 0$$

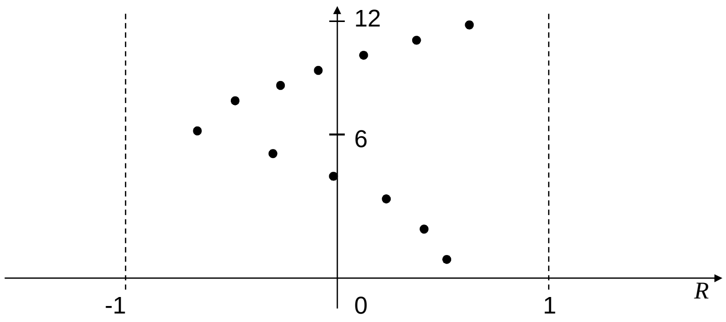
  on vérifie que $\gamma_k = \gamma_{-k}$, et par conséquent

  $R_k = R_{-k}$

- La representation graphique de R_k pour $k=0,1,2,3,\ldots$ s'appelle Corrélogramme.
- L'examen du Corrélogramme des données observées permettra de repérer l'existence d'autocorrélations éventuelles ainsi que l'ordre d'autocorrélation le plus significatif.

  Exemple:

  Le graphique suivant reproduit un tel corrélogramme pour une série temporelle



manifestant des variations saisonnières très marquées, avec une augmentation des ventes de Janvier à Juin, puis une réduction continue jusqu'en Décembre.

L'autocovariance d'ordre 12 est alors très élevée, puisque tous les douze mois des évolutions similaires sont enregistrées.

- En revanche, l'autocorrelation d'ordre 6 manifesterait une valeur négative puisque, par exemple, les ventes élevées de Juin seraient associées aux ventes faibles de Décembre.
- Lorsque le processus est stationnaire, en principe, on peut estimer les paramètres $\mu, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ à partir d'une seule réalisation.
- Considérant un échantillon $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$, on peut utiliser les estimateurs suivants:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \hat{\mu}\right)^2$$

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}\left(Y_{t+k} - \hat{\mu}\right)\left(Y_t - \hat{\mu}\right)$$

- Évidement, lorsque k croît, on dispose de moins d'observations pour calculer $\hat{\gamma}_k$. Ainsi, pour $\hat{\gamma}_{T-1}$ on disposera seulement d'une seule observation.
- En plus d'être stationnaire, il est nécessaire que le processus stochastique a la propriété d'ergodicité, pour que l'inférence peut se réaliser d'une forme adéquate.
- Le concept d'ergodicité sera examiné d'une forme intuitive. Lorsqu'il y a une forte corrélation entre les valeurs d'une série temporelle éloignées dans le temps, c'est-à-dire R_k garde des valeurs très élevées pour un k assez grand, il arrive que lorsque on augmente la taille de l'échantillon, il y a peu d'information nouvelle qui s'ajoute.

- La conséquence de ce fait est que l'augmentation de la taille de l'échantillon n'aura pas d'utilité, puisqu'il faudra calculer un nombre élevé d'autocovariances pour bien caractériser le processus.
- Lorsque la propriété d'ergodicité est vérifiée, on peut caractériser le processus par ses moments de premier et de second ordre.

- Une condition nécessaire, mais pas suffisante de l'érgodicité est: $\lim_{k \to \infty} R_k = 0$
- Dans la suite du cours, on supposera toujours que le processus est érgodique.
- Lorsqu'un processus est stationnaire –et aussi érgodique- tout le problème de l'inférence se simplifie d'une façon remarquable.
- Maintenant, on peut poser cette question: Est-il raisonable de supposer les séries économiques sont générées par des processus stochastiques stationnaires?

- En général, on peut affirmer que les séries économiques ne sont pas stationnaires. On peut penser, par exemple, au PIB, l'indice des prix, l'offre monnaitaire…etc.
- Apès avoir examiner cette situation, on peut conclure immédiatement que l'utilisation des processus stochastiques stationnaires en économie est peu intéressante. Mais, en réalité, c'est pas le cas, parce que par de simples transformations la plus part des séries économiques peuvent se convertir en des séries approximativement stationnaires. Alors, il sera facil d'appliquer l'inférence statistique à ces processus.