- Revenons au modèle AR(1):
- On a trouvé l'équation $\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1}$ pour $\tau>0$, ou encore $\gamma_\tau - \Phi_1 \gamma_{\tau-1} = 0$ qui est une équation aux différences homogène de premier ordre.

- Sa solution sera $\gamma_\tau = A\,\lambda^\tau = \gamma_0\,\Phi_1^\tau$

- Si dans l'équation $\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1}$ on divise les deux membres par γ_0, on obtient:

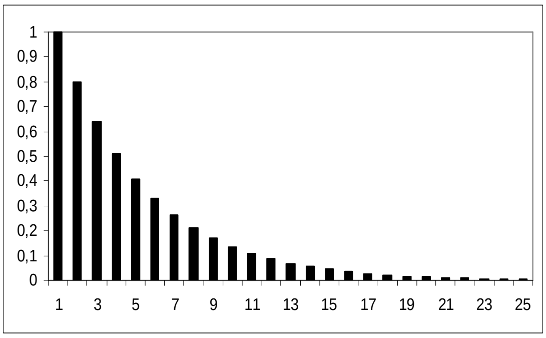
$$R_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \Phi_1 R_{\tau-1} \qquad \text{pour } \tau>0$$

- La solution de l'équation aux différences précédente sera: $R_\tau = \Phi_1^\tau R_0 = \Phi_1^\tau$

- Pour les auto-covariances, la condition initiale est détérminée par la valeur de la variance; par contre pour les auto-correlations, la condition initiale est toujours $R_0=1$.

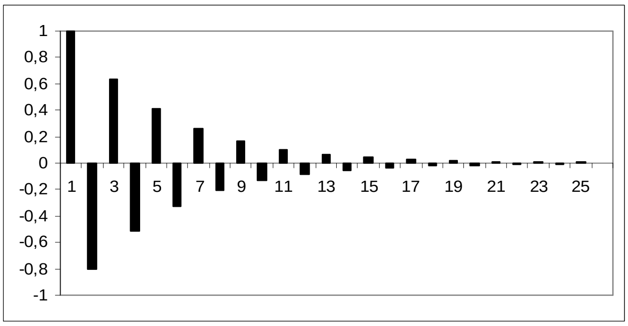
- Représentons le corrélogramme pour $\Phi_1=0,8$ et $\Phi_1=-0,8$ respectivement.

$R_\tau=(0,8)^\tau$ correlation du Modèle $Y_t=0,8Y_{t-1}+e_t$



Dans le premier cas, le corrélogramme montre une décroissance exponentielle pure.

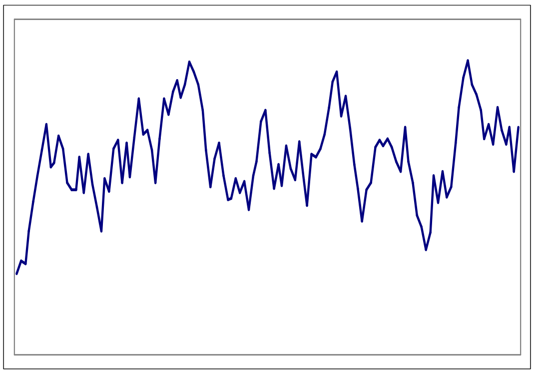
$R_\tau=(-0,8)^\tau$ correlation du Modèle $Y_t=0,8Y_{t-1}+e_t$



Par contre, lorsque $\Phi_1=-0,8$ le corrélogramme montre que *R* suit une décroissance exponentielle, mais avec alternance de signe.

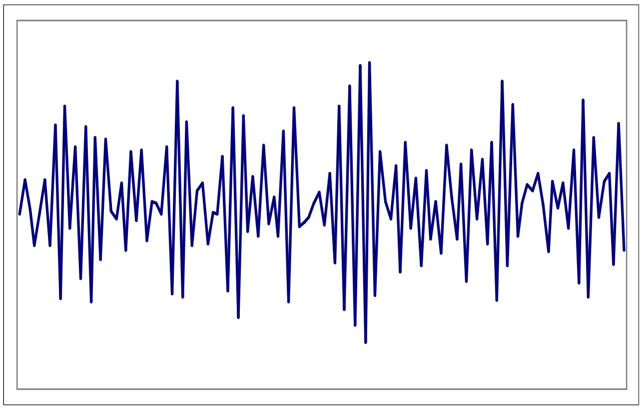
- Maintenant, on va présenter les réalisations générée artificiellement à partir des nombres aléatoires pour les modèles $Y_t=0,8Y_{t-1}+e_t$ et $Y_t=-0,8Y_{t-1}+e_t$.
- Dans les deux cas, on a pris $Y_0=0$ comme valeur initiale.

Modèle $Y_t=0,8Y_{t-1}+e_t$



Nombres d'observations: 120

Modèle $Y_t=-0,8Y_{t-1}+e_t$



Nombres d'observations: 120

- Dans un processus $AR(1)$ stationnaire, on peut obtenir Y_t en utilisant l'inverse de l'opérateur polynômiale des retards. Ainsi:

$$Y_t=\Phi^{-1}(L)e_t=\frac{1}{1-\Phi_1 L}e_t$$

- Évidement, si on suppose que $|\Phi_1 L|<1$, la fraction du deuxième membre peut être considéré comme la somme des termes d'une pregression géométrique infinie convergente de raison $\Phi_1 L$. C'est à dire:

$$Y_t=\sum_{j=0}^{\infty}(\Phi_1 L)^j e_t=\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_1^j e_{t-j}$$

- On a vu que par des substitutions consécutives on a:
$Y_t=\Phi_1[\Phi_1 Y_{t-2}+e_{t-1}]+e_t=\ldots=\sum_{j=0}^{t+N-1}\Phi_1^j e_{t-j}+\Phi_1^{t+N}Y_{-N}$
par des substitutions indifinies, on arrive à la même conclusion que
$$Y_t=\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_1^j e_{t-j}$$
- Donc, d'après la términologie vue dans le chapitre précédent, ce dernier modèle est un modèle de moyennes mobiles avec des retards infinis. Alors, on remarque que l'on a parti d'un modèle $AR(1)$ initial, on a arrivé à un modèle $MA(\infty)$.

Modèle AR(2):

- Un modèle $AR(2)$ est donnée par:
$$Y_t=\Phi_1 Y_{t-1}+\Phi_2 Y_{t-2}+e_t$$
ou en utilisant l'opérateur des retards:
$$(1-\Phi_1 L-\Phi_2 L^2)Y_t=e_t$$
- Pour que le processus antérieur soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation $1-\Phi_1 L-\Phi_2 L^2=0$ dépassent l'unité.

- Si les conditions de stationnarité sont vérifiées -on suppose par la suite qu'elles le sont- on aura $E(Y_t)=0$.

- Si on multiplie les deux membres l'équation $Y_t=\Phi_1 Y_{t-1}+\Phi_2 Y_{t-2}+e_t$ par $Y_{t-\tau}$ et on prend des esperances, on aura

$$E[Y_t Y_{t-\tau}]=\Phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-\tau}]+\Phi_2 E[Y_{t-2} Y_{t-\tau}]+E[e_t Y_{t-\tau}]$$

- En tenant compte que

$$E[e_t Y_t]= E[e_t(\Phi_1 Y_{t-1}+\Phi_2 Y_{t-2}+e_t)]=\mathrm{E}[e_t e_t]=\sigma^2_e$$

l'expression précédente pour $\tau=0$ donne le résultat suivant:

$$\gamma_0=\Phi_1\gamma_1+ \Phi_2\gamma_2+ \sigma^2_e$$

- Pour des valeurs de $\tau>0$ on aura

$$\gamma_\tau=\Phi_1\gamma_{\tau-1}+ \Phi_2\gamma_{\tau-2} \qquad \tau>0$$

L'équation des autocovariances précédente est une équation aux différences homogènes de second ordre.

En divisant les deux membres de cette équation par γ_0, on obtient l'équation aux différence relative aux autocorrelations.

$$R_\tau=\Phi_1 R_{\tau-1}+\Phi_2 R_{\tau-2} \qquad \tau>0$$

sa solution sera de type

$$R_\tau=A_1\lambda_1^\tau+A_2\lambda_2^\tau$$

donde $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$ seront les racines du polynôme caractéristique $1\text{-}\Phi_1 L\text{-}\Phi_2 L^2=0$

les constantes arbitraires se déterminent à partir des conditions initiales:

$$R_0=1 \text{ et } R_1=\Phi_1/(1\text{-}\Phi_2).$$

- Cette dernière valeur se déduit en faisant $\tau=1$ dans $R_\tau=\Phi_1 R_{\tau-1}+\Phi_2 R_{\tau-2} \quad \tau>0$.

  Donc $R_0=A_1\lambda_1^0+A_2\lambda_2^0=1$

  $R_1=A_1\lambda_1+A_2\lambda_2=\Phi_1/(1\text{-}\Phi_2)$

- Si on résoud ce système pour A_1 et A_2, et en substituant les valeurs obtenues dans sa solution $R_\tau=A_1\lambda_1^\tau+A_2\lambda_2^\tau$, on peut appliquer cette formule pour déterminer la valeur de R_τ pour n'importe quelle valeur de $\tau>0$.

- Il faut tenir compte que A_1, A_2, λ_1 et λ_2 ont été calculer a partir de Φ_1 et Φ_2.
- Maintenant, on peut poser le problème inverse, c'est-à-dire, déterminer Φ_1 et Φ_2 à partir du corrélogramme.
- Dans ce dernier cas, en faisant $\tau=1$ et $\tau=2$ dans l'équation $R_\tau=\Phi_1 R_{\tau-1}+\Phi_2 R_{\tau-2} \quad \tau>0$, on obtient le système des équations suivant:

$$R_1= \Phi_1+ \Phi_2 R_1$$
$$R_2= \Phi_1 R_1+ \Phi_2$$

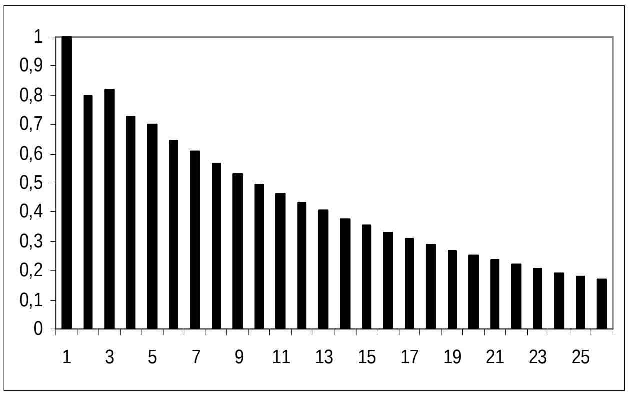
- Le système antérieure s'appelle le système des équations de Yule-Walker.
- Résolvant ce système pour Φ_1 et Φ_2, on obtient:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ R_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

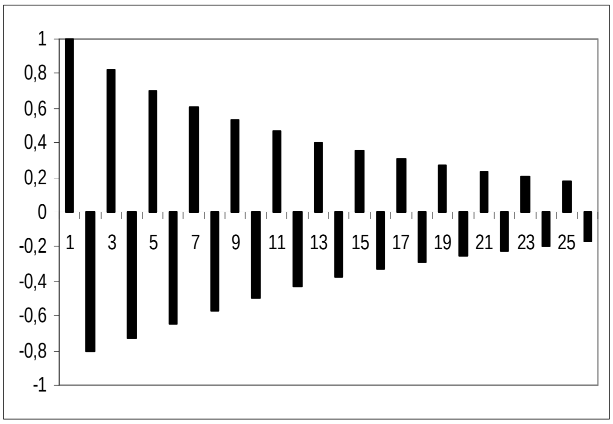
- Représentons le corrélogramme pour quatre modèles AR(2).

Corrélogramme pour le modèle:

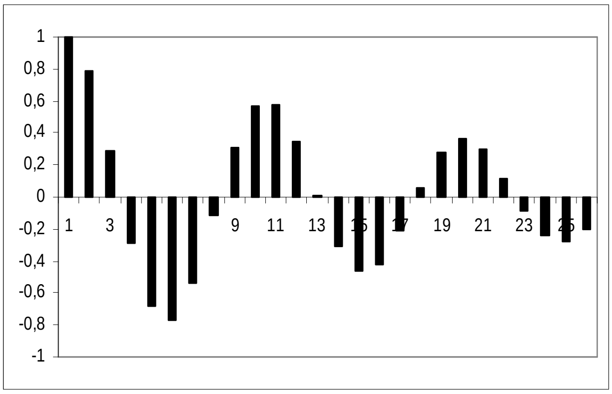
$Y_t=0,4Y_{t-1}+0,5Y_{t-2}+e_t$. Où on a pris $R_0=1$, $R_1=0,4/0,5$ et $R_t=0,4R_{t-1}+0,5R_{t-2}$ pour $t>1$



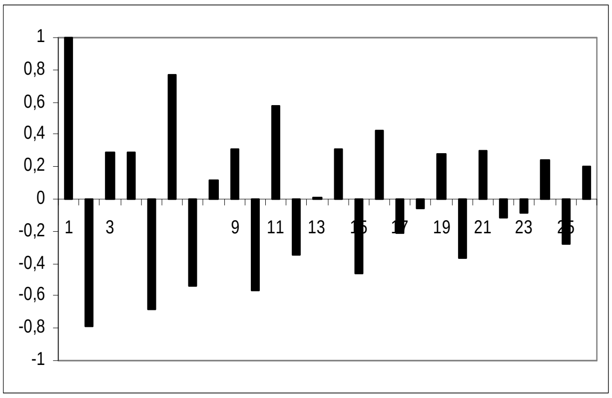
Corrélogramme pour le modèle:
$Yt=-0,4Yt-1+0,5Yt-2+e_t$. Où on a pris $R_0=1$, $R_1=-0,4/0,5$ et $R_t=-0,4R_{t-1}+0,5R_{t-2}$ pour $t>1$



Corrélogramme pour le modèle:
$Yt=1,5Y_{t-1}-0,9Y_{t-2}+e_t$. Où on a pris $R_0=1$, $R_1=1,5/1,9$ et $R_t=1,5R_{t-1}-0,9R_{t-2}$ pour $t>1$

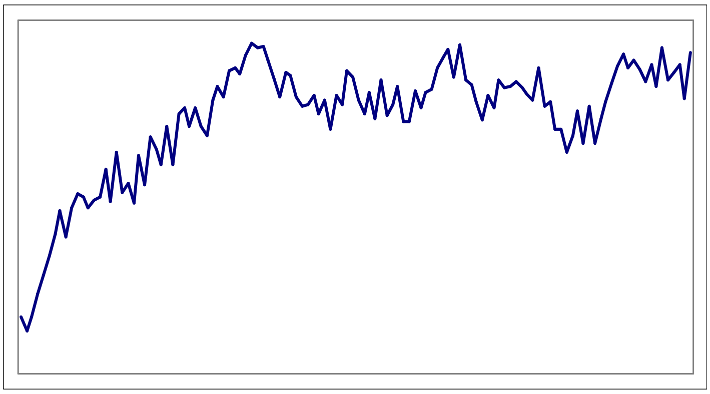


Corrélogramme pour le modèle:
$Y_t=-1,5Y_{t-1}-0,9Y_{t-2}+e_t$. Où on a pris $R_0=1$, $R_1=-1,5/1,9$ et $R_t=-1,5R_{t-1}-0,9R_{t-2}$ pour $t>1$



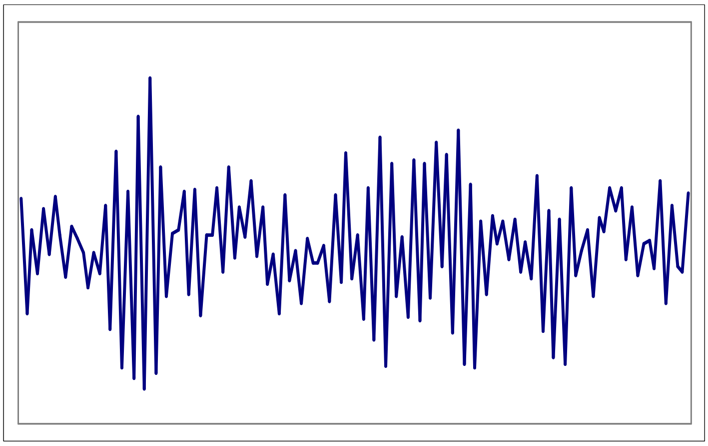
- Maintenant, on va présenter les réalisations générée artificiellement à partir des nombres aléatoires pour tous ces modèles AR(2).
- Dans les quatre cas, on a pris $Y_0=0$ et $Y_1=0$ comme valeurs initiales.

Réalisations du modèle: $Y_t=0,4Y_{t-1}+0,5Y_{t-2}+e_t$



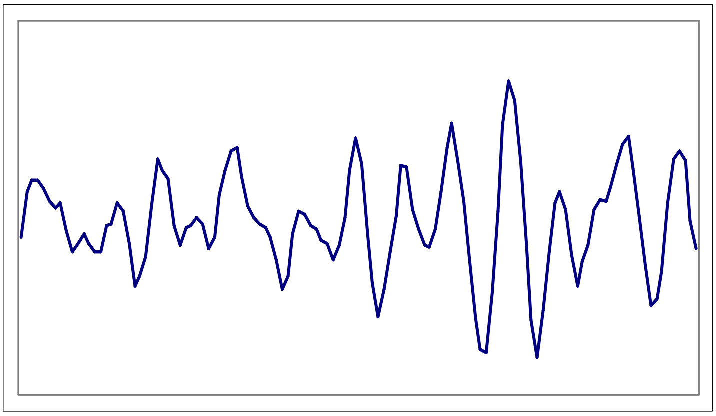
Nombres d'observations: 120

Réalisations du modèle: $Y_t=-0,4Y_{t-1}+0,5Y_{t-2}$



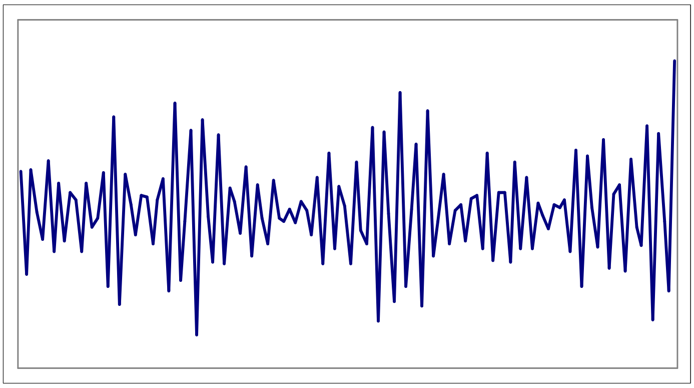
Nombres d'observations: 120

Réalisations du modèle: $Y_t=1,5Y_{t-1}-0,9Y_{t-2}$



Nombres d'observations: 120

Réalisations du modèle: $Y_t=-1,5Y_{t-1}-0,9Y_{t-2}$



Nombres d'observations: 120