Modèles de moyennes mobiles

- Un modèle de moyennes mobiles d'ordre q, que l'on note MA(q), est donné par:

$$Y_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}-\ldots-\theta_q e_{t-q}$$

  où les les pondérations θ_i sont affectées par un signe "moins" pour raison de convention de notation.
- En utilisant l'opérateur polynomial de retards

$$\theta(L)=1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\ldots-\theta_q L^q$$

- Le modèle de moyennes mobiles dans sa forme réduite:

$$Y_t=\theta(L)e_t$$

- Dans ce modèle, la moyenne est nulle, quelques soient les valeurs de θ_i.
- En effet,

$$E[Y_t]=\theta(L)E[e_t]=0$$

- Si dans le modèle $Y_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}-\ldots-\theta_q e_{t-q}$ on inclue un terme constant

$$Y_t=\delta+e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}-\ldots-\theta_q e_{t-q}$$

- Alors, si on applique l'espérance mathématique à l'expression précédente, on obtient:

$$E[Y_t]=\delta$$

Donc, dans les modèles de moyennes mobiles, la moyenne du processus coïncide avec le terme indépendant δ.

- Sans perte de généralité, on supposera dans la suite que $\delta=0$.
- Maintenant, on va étudier les propriétés d'un MA(1) et d'un MA(2), pour les généraliser ensuite à un MA(q).

Modèle MA(1):

Un modèle MA(1) est donné par

$$Y_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}=(1-\theta_1 L)e_t$$

Si on multiplie les deux membres par de ce modèle par $Y_{t-\tau}$, et si on calcul des espérances mathématiques, on obtient:

$$E[Y_t Y_{t-\tau}]=E[e_t-\theta_1 e_{t-1}][e_{t-\tau}-\theta_1 e_{t-\tau-1}]$$

- On peut voir que pour $\tau=0$, en tenant compte que $E[e_t e_{t'}]=0$ pour $t\neq t'$, on a

$$\gamma_0=E[Yt]^2=E[e_t^2+\theta_1^2 e_{t-1}^2-2\theta_1 e_t e_{t-1}]=[1+\theta_1^2]\sigma_e^2$$

- Pour $\tau=1$

$$\gamma_1=E[e_t-\theta_1 e_{t-1}][e_{t-1}-\theta_1 e_{t-2}]=-\theta_1\sigma_e^2$$

- Pour les valeurs de $\tau>1$, on déduit que

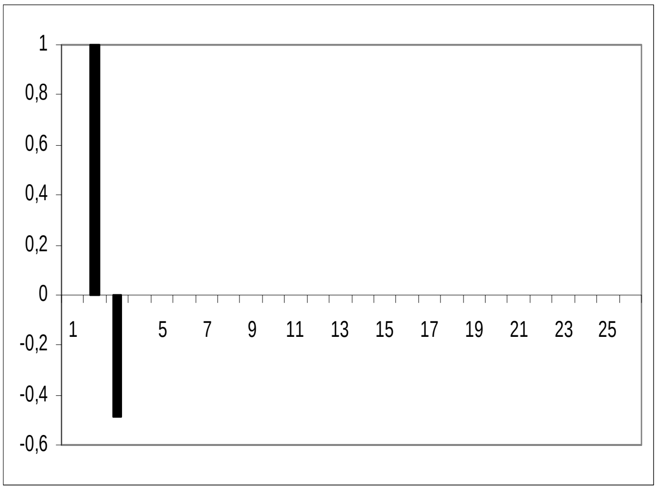
$$\gamma_\tau=0 \qquad \tau>1$$

- Si on divise par γ_0 les deux membres des deux expression précédentes, on obtient les coefficients d'autocorrelation:

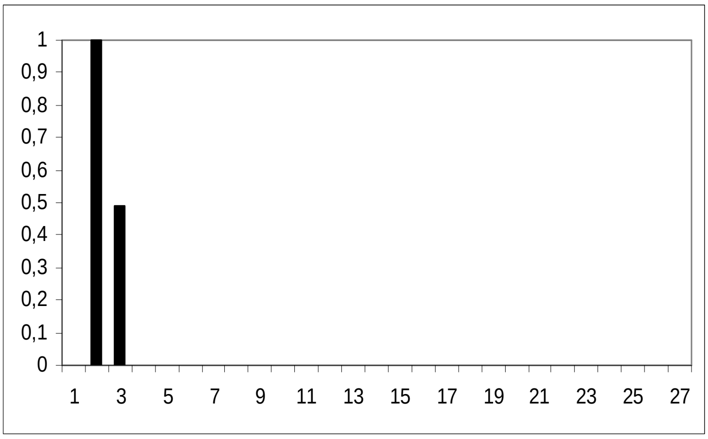
$$R_1=\frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} \qquad \tau=1$$

$$R_\tau=0 \qquad \tau>1$$

Représentons le corrélogramme d'un modèle MA(1) pour les valeurs du paramètre $\theta_1=0,8$ et $\theta_1=-0,8$.

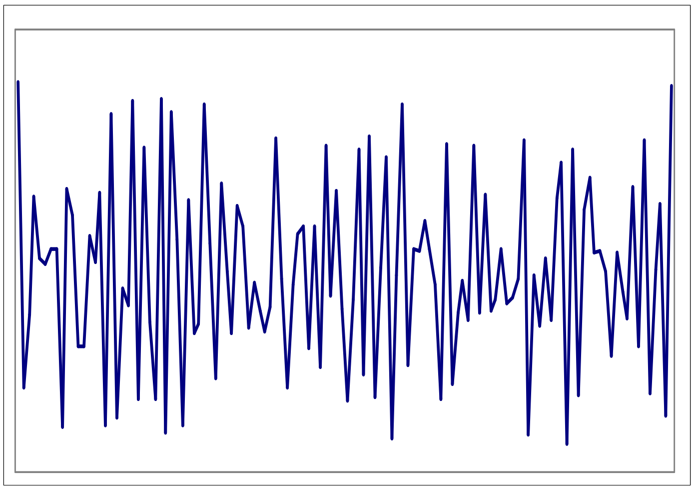


$$Y_t = e_t - 0{,}8\ e_{t-1}$$



$$Y_t = e_t + 0{,}8\ e_{t-1}$$

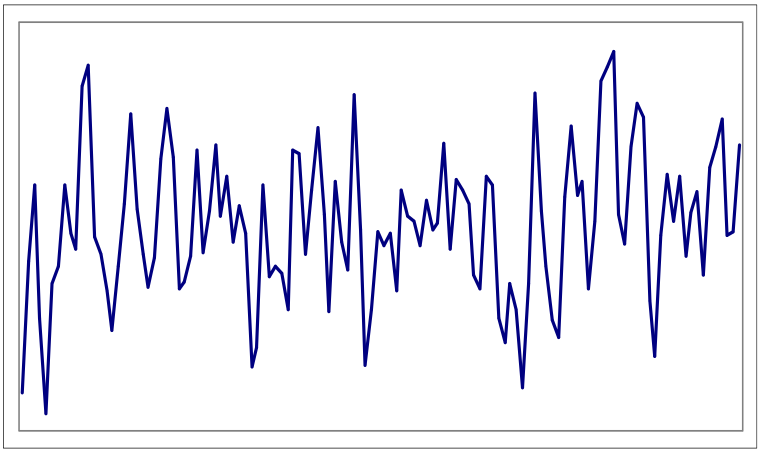
De même, on représente les réalisations correspondantes au modèle $Y_t = e_t - 0,8\ e_{t-1}$



Nombres d'observations: 120

et les réalisations correspondantes au modèle

$Y_t = e_t + 0,8\ e_{t-1}$



- Un modèle MA(1) est toujours stationnaire indépendement de la valeur prise par le paramètre θ_1.
- Si le modèle MA(1) est exprimé ainsi:

$$e_t=Y_t+\theta_1 e_{t-1}$$

et si on effectue des substitutions successives, alors:

$$e_t=Y_t+\theta_1[Y_{t-1}+\theta_1 e_{t-2}]=$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=Y_t+\theta_1 Y_{t-1}+ \theta_1^2 Y_{t-2}+\ldots+ \theta_1^N Y_{t-N}+ \theta_1^{N+1} e_{t-N-1}$$

- Si $|\theta_1|<1$, le dernier teme de la dernière expression a moins de poids à mesure que N soit plus grande, et en plus le poids de chaque Yt retardée décroit à mesure que le nombre de retards croit.
- Par conséquent, sous cette condition, un modèle MA(1) peut s'ecrire:

$$e_t=Y_t+\theta_1 Y_{t-1}+ \theta_1^2 Y_{t-2}+\ldots$$

Ainsi, on a passé d'un modèle MA(1) à un AR(∞).

- La condition qui nous a permis de passer d'un modèle à un autre, c'est-à-dire la condition d'inversibilité, est $|\theta_1|<1$.
- Aussi, lorsque $|\theta_1|<1$, on aura pu écrire:

$$Y_t=(1-\theta_1 L)e_t$$

ou encore
$$e_t = \frac{1}{1-\theta_1 L} Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (\theta_1 L)^j Y_t$$

Donc
$$e_t=Y_t+\theta_1 Y_{t-1}+\theta_1^2 Y_{t-2}+\ldots$$

- L'équation $Y_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$ peut être considérée comme une équation aux différences en e_t (Y_t sera dans ce cas la partie non homogène).

- Pour que cette équation soit stable, il faut que la racine du polynôme caractéristique $1-\theta_1 L=0$ soit en dehors du cercle unité, c'est-à-dire que

$$|L| = \left|\frac{1}{\theta_1}\right| > 1$$

ou encore $|\theta_1|<1$.

- Comme on peut voir, la condition d'inversibilité d'un modèle MA(1) est équivalente, dans le sens formal, à la condition de stationnarité d'un modèle AR(1).

- Nous répetons qu'un modèle MA(1) est toujours stationnaire et que la condition d'inversibilité n'est là que pour nous permettre de passer à un modèle AR(∞).

Pr. Mohamed El Merouani 15

Modèle MA(2)

- Un modèle MA(2) est donné par

$$Y_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}=(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)e_t$$

- Si on multiplie les deux membres par de ce modèle par $Y_{t-\tau}$, et si on calcul des espérances mathématiques, on obtient:

$$E[Y_t Y_{t-\tau}]=E[e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}][e_{t-\tau}-\theta_1 e_{t-\tau-1}-\theta_2 e_{t-\tau-2}]$$

Pr. Mohamed El Merouani 16

- Pour différentes valeurs de τ, on obtient les résultats suivants:

$\gamma_0=(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_e^2$ $\tau=0$

$\gamma_1=(-\theta_1+\theta_1\theta_2)\sigma_e^2$ $\tau=1$

$\gamma_2=(-\theta_1)\sigma_e^2$ $\tau=2$

$\gamma_\tau=0$ $\tau>2$

A partir des expressions précédentes, on obtient facilement les coefficients d'autocorrelation:

$$R_1=\frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$R_2=\frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

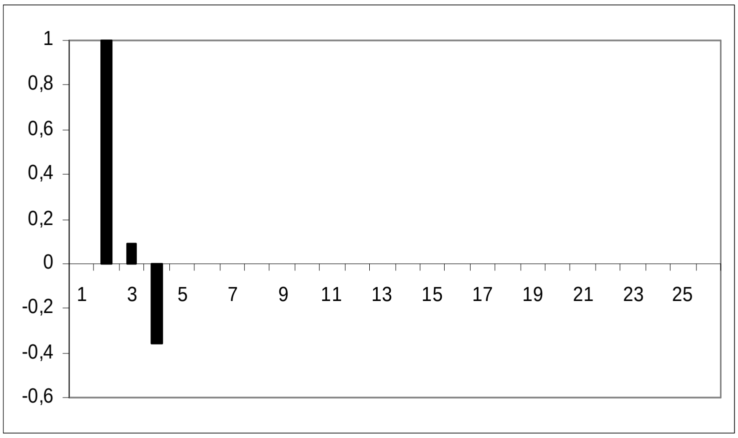
$R_\tau=0$ $\tau>2$

- Pour qu'un processus MA(2) soit inversible, il faut que les racines du polynôme caractéristique:

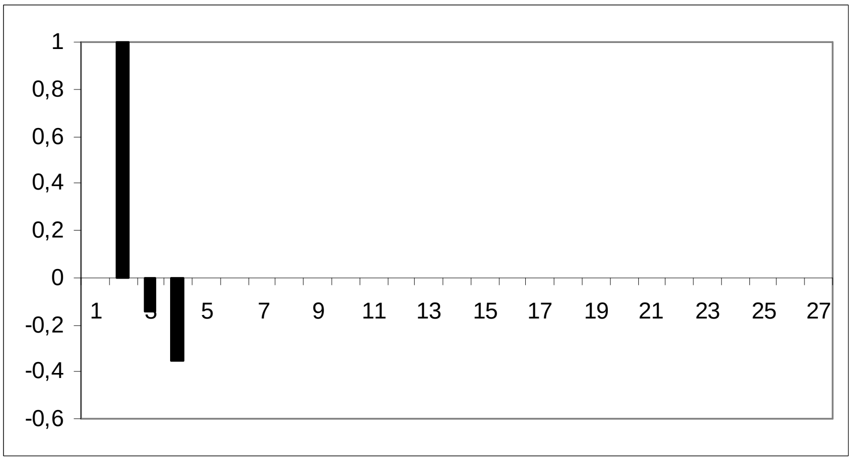
$$1-\theta_1 L-\theta_2 L^2=0$$

soient en dehors du cercle unité.

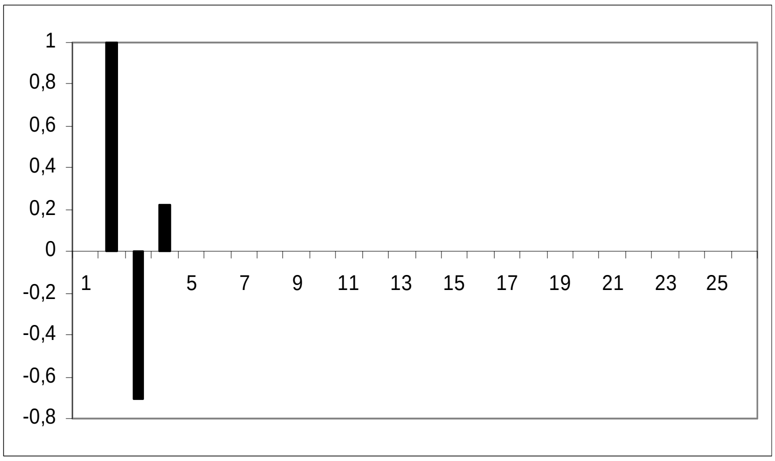
- Par la suite on va représenter les corrélogrammes et les réalisations correspondentes à quatre modèles MA(2) inversibles.



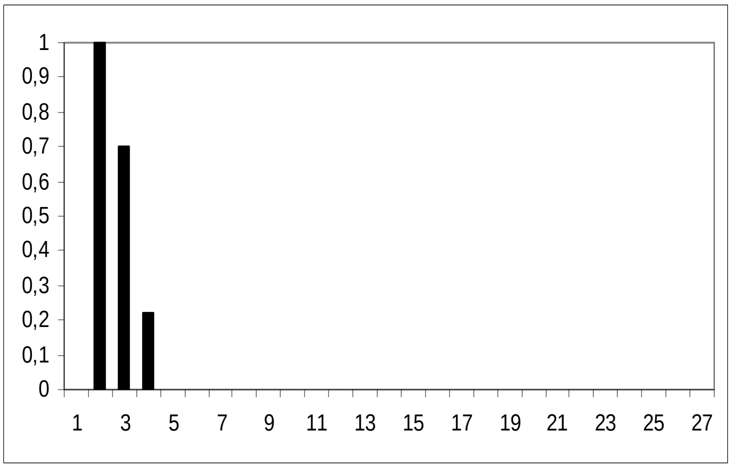
$$Y_t=e_t+0,4e_{t-1}-0,5e_{t-2}$$



$$Y_t = e_t - 0{,}4e_{t-1} - 0{,}5e_{t-2}$$

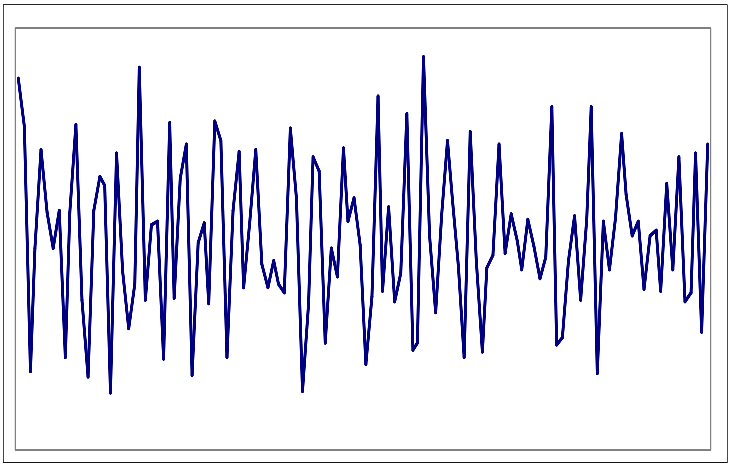


$$Y_t = e_t - 1{,}5e_{t-1} + 0{,}9e_{t-2}$$



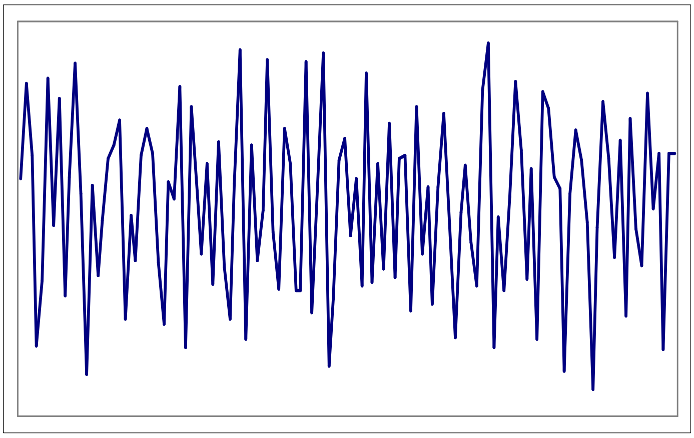
$Y_t = e_t + 1{,}5e_{t-1} + 0{,}9e_{t-2}$

$Y_t = e_t + 0{,}4e_{t-1} - 0{,}5e_{t-2}$



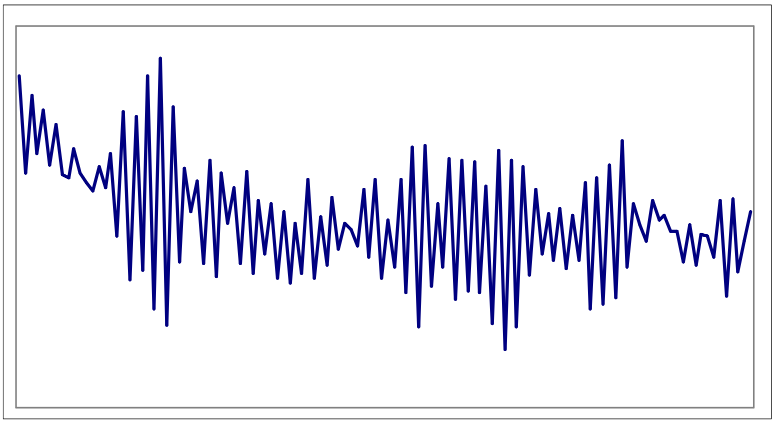
Nombres d'observations: 120

$Y_t = e_t - 0{,}4e_{t-1} - 0{,}5e_{t-2}$



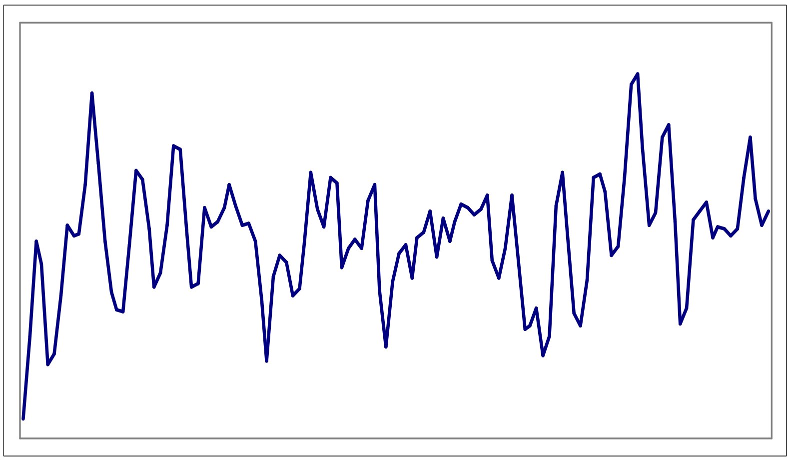
Nombres d'observations: 120

$Y_t = e_t - 1{,}5e_{t-1} + 0{,}9e_{t-2}$



Nombres d'observations: 120

$Y_t = e_t + 1{,}5e_{t-1} + 0{,}9e_{t-2}$



Nombres d'observations: 120