Université Abdelmalek Essaâdi **Année universitaire : 2014/2015**
ENSA de Tétouan **Première année de cycle ingénieur**

Corrigés de la série ° 3 de Probabilités et Statistiques

Exercice 1 :
Le tableau de la loi de la variable aléatoire X est :

k	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
$P(X=k)$	p^n	$C_n^1 q p^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^m q^m p^{n-m}$	$\cdots$	q^n

où $q = 1-p$; $E(X) = nq$ et $Var(X) = npq$

Exercice 2 :
La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.
$P(X=m) = C_n^m (\frac{1}{2})^n$; $P(X \geqslant m) = (\frac{1}{2})^n \sum_{k=m}^n C_n^m$ et $P(X < m) = 1 - P(X \leqslant m)$.

Exercice 3 :
La variable aléatoire X_i, nombre de signes erronés dans l'i^{eme} message, suit une loi binomiale de paramètres n_i et p. La probabilité pour que l'i^{eme} message soit erroné est égale à la probabilité pour que dans les n_i signes de ce message il y ait au moins trois signes erronés

$$P(X_i \geqslant 3) = 1 - P(X_i < 3) = 1 - \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^j p^j (1-p)^{n_i - j}$$

La probabilité pour qu'au moins un des k messages soit erroné est égale à

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^j p^j (1-p)^{n_i - j}$$

Exercice 4 :
La fonction de répartition d'une loi de Weibull est :

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x^\alpha}; (x \geqslant 0),$$

où $\beta > 0$ est une certaine constante ; α, un nombre entier positif.

1. Sa densité est $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}$
2. Son espérance mathématique sera $E(X) = \int_0^\infty x\alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} dx$
   Soit le changement de variable : $\beta x^\alpha = y$; $x = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$dx = \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy;$$

$$E(X) = \int_0^\infty \alpha y e^{-y} \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$$

$$= \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \beta^{-\frac{1}{\alpha}}$$

où $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ est la seconde fonction d'Euler. Calculons, maintenant, la variance. D'abord, on cherche $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \int_0^\infty \alpha\beta x^{\alpha+1} e^{-\beta x^\alpha} dx =$$

En faisant le même changement d'avant, $\beta x^\alpha = y$; $x = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient :

$$E(X^2) = \int_0^\infty \alpha\beta\beta^{-(1+\frac{1}{\alpha})} y^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-y} \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy =$$

$$= \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^\infty y^{\frac{2}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \beta^{-\frac{2}{\alpha}};$$

D'où $Var(X) = \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\}^2\right]$.

Exercice 5 :
Comme X et Y sont indépendantes, on a : $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$
On obtient, la fonction de densité conjointe du couple (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}; \quad \text{pour} \quad y \in (0, 1)$$

De même $F(x, y) = F_1(x).F_2(y)$ (puisque X et Y sont indépendantes), alors sa fonction de répartition sera :

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad y < 0; \\ y\left[\Phi(x\sqrt{2})\right] & \text{pour} \quad 0 \leqslant y < 1; \\ \Phi(x\sqrt{2}) & \text{pour} \quad y \geqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 6 :
X, le nombre d'apparitions de l'événement A dans n expériences indépendantes, est mis sous la forme $X = \sum_{i=1}^n X_i$, où X_i est l'indicatrice de l'événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience, c'est-à-dire :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si, dans l'}i\text{-ème expérience l'événement est réalisé;} \\ 0, & \text{si, dans l'}i\text{-ème expérience l'événement n'a pas été réalisé} \end{cases}$$

$$E(X_i) = p; \qquad Var(X_i) = pq$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np; \qquad Var(X) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = npq$$

Exercice 7 :
D'une manière analogue à l'exercice précédent $X = \sum_{i=1}^n X_i$, où X_i est l'indicatrice de l'événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i,$$

et sa variance est :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i q_i.$$

Exercice 8 :
Considérons le modèle physique de l'apparition d'une loi hypergéométrique : tirage de n boules d'une urne contenant a boules blanches et b noires, X est le nombre de boules blanches extraites. Représentons n tirages d'une boule comme n expériences dont chacune peut donner lieu à l'événement $A =${boule blanche}. Représentons la variable X comme la somme des X_i, variables indicatrices de l'événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les variables aléatoires X_i sont dépendantes, mais la formule de l'addition des espérances mathématiques est applicable :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i); \qquad E(X_i) = \frac{a}{a+b}; \qquad E(X) = \frac{na}{a+b};$$

La variance de la somme des variables aléatoires X_i est :

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i\neq j} Cov(X_i, X_j)$$

$$Var(X_i) = pq = \frac{a}{a+b}\frac{a}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{nab}{(a+b)^2}.$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$$

Le produit des variables indicatrices X_iX_j de l'événement A dans les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ expériences n'est égal à l'unité que si $X_i = 1$, $X_j = 1$, c'est-à-dire que si l'événement A se produit dans l'$i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ expériences. La probabilité de ceci est égale à $\frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}$; c'est également la valeur de l'espérance mathématique

$$E(X_iX_j) = \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}.$$

D'où :

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

Finalement,

$$Var(X) = \frac{nab}{(a+b)^2} + \left(\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Exercice 9 :
On trouve, d'après les formules de l'exercice précédent,

$$E(X) = 2,5 \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{35}{44} \approx 0,795.$$

Exercice 10 :
Mettons la variable aléatoire X sous la forme d'une somme

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i,$$

où X_1 est le nombre d'expériences jusqu'à la première apparition de l'événement A ; X_2 est le nombre d'expériences entre sa première et sa deuxième apparition ;$\cdots$; X_k est le nombre d'expériences de la $(k-1)$-ième et la k-ième apparition.
Chaque variable aléatoire X_i possède une répartition géométrique qui débute par l'unité et ses caractéristiques sont

$$E(X_i) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad Var(X_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

En appliquant les formules d'addition des espérances mathématiques et des variances, on obtient :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i) = kp; Var(X) = \sum_{i=1}^{k} Var(X_i) = \frac{k(1-p)}{p^2}; \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}$$

Exercice 11 :
D'après la solution de l'exercice précédent, l'espérance mathématique du nombre de pièces mises à l'essai est $\mu_X = kp$, et sa variance est $\sigma_X^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$.
D'où son écart type sera $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}$

Exercice 12 :
L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev implique :

$$P\left(|X-\mu| \geqslant 3\sigma\right) \leqslant \frac{Var(X)}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9};$$

$$\text{donc} \qquad P\left(|X-\mu| \geqslant 3\sigma\right) \leqslant \frac{8}{9};$$

Ainsi, toute variable aléatoire s'écarte de son esérance mathématique à moins de 3σ avec une probabilité non inférieure à $\frac{8}{9}$[1] .

Exercice 13 :

$$a = E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}.n.1,5 = 1,5;$$

$$Var(Y) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{n}{n^2}\frac{1}{12} = \frac{1}{12n};$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{1}{2\sqrt{3n}}.$$

La valeur maximale pratiquement possible de l'erreur est $3\sigma_Y$.

1. C'est le cas extrême, le plus défavorable. Dans la pratique, pour les variables aléatoires qui se présentent dans le cas courants cette probabilité est bien plus proche de l'unité ; par exemple, pour la loi normale elle est égale à $0,997$; pour la loi uniforme, à l'unité ; pour la loi exponentielle, à $0,982$.