Chapitre 3

Lois de probabilités usuelles discrètes et continues

1

Lois de probabilités discrètes

2

Loi de Dirac:

- Soit un nombre a fixé et soit une v.a. X prenant la valeur a, c'est-à-dire $P(X=a)=1$.

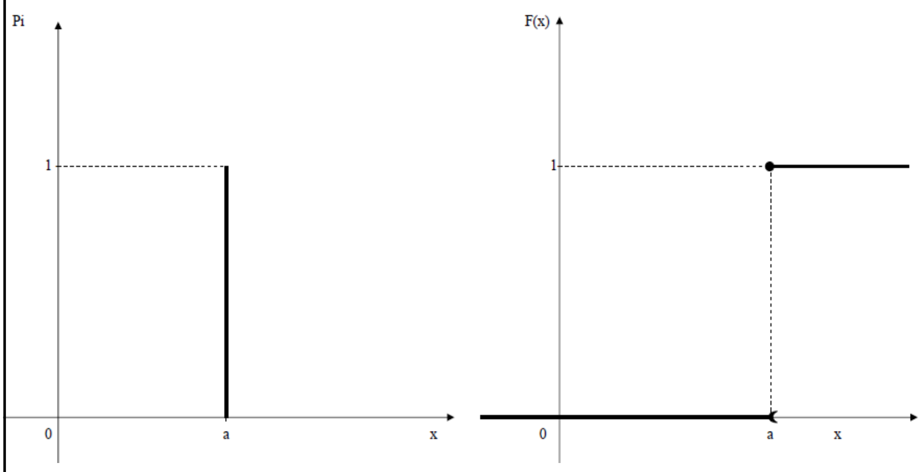
On appelle loi de Dirac au point a la probabilité

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

La représentation de l'histogramme et de la fonction de répartition sont:

3

Loi de Dirac:



4

Loi de Dirac:

- Sa fonction de répartition:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x < a \\ 1, & si \;\; x \geq a \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est $E(X)=a$ et $E(X^2)=a^2$
- Sa variance est $Var(X)=0$

Loi de Bernoulli:

- Une v. a. X suit une loi de Bernoulli si elle prend les deux valeurs 1 et 0 avec $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=q$ où $p+q=1$.
- p s'appelle paramètre de la loi.
- $\{X=1\}$ est dit événement succès et $\{X=0\}$ est dit événement échec.
- X représente donc le nombre de succès obtenu après la réalisation d'une seule expérience aléatoire.

Loi de Bernoulli:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	1	0	Σp_i
p_i	p	q=1-p	1

Alors $E(X)=\Sigma x_i p_i=1xp+0xq=p$

$Var(X)=\Sigma x_i^2 p_i - E(X)^2 = x_1^2 p + x_0^2 q - p^2 = p - p^2$

$Var(X)=p(1-p)=pq$

Loi Binômiale:

- On considère l'expérience qui consiste en n répétitions indépendantes d'une même expérience dont l'issue est l'apparition ou la non apparition d'un événement A qui:
  - Soit se réalise avec la probabilité p (p=probabilité du succès).
  - Soit ne se réalise pas avec la probabilité $q=1-p$ (q=probabilité d'échec).
- Soit X le nombre d'apparitions de cet événement parmi ces n expériences.
- On a $\Omega=\{A,\bar{A}\}^n$ et $0 \leq X \leq n$.

Loi Binômiale:

- On cherche $P(X=k)$. Le résultat de ces n expériences est une suite (A_1, A_2,…, A_n) où $A_i=A$ ou $\bar{A}$, pour tout i=1,2,…,n.
- Si on suppose que A est apparu k fois et $\bar{A}$ (n-k) fois, la probabilité d'une de ces suites (A_1, A_2,…, A_n) est $p^k(1-p)^{n-k}$. Comme il existe C_n^k suites (A_1, A_2,…, A_n) où A est apparu k fois et $\bar{A}$ (n-k) fois, on déduit que:
$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k};\quad 0\le k\le n.$$

9

Loi Binômiale:

- On vérifie que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$
- En effet, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$
- On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on la note symboliquement *B(n, p).*
- *On écrit* $X \sim$ *B(n,p)*

Prof. Mohamed El Merouani 10

Loi Binômiale:

- Espérance mathématique: $E(X)=np$
- Variance mathématique: $Var(X)=npq$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{npq}$
- La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes répétés de manière indépendante pouvant prendre deux états, tels que: succès ou échec, tout ou rien.

Loi multinomiale:

- Supposons que dans une expérience aléatoire peuvent se présenter les événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ qui forment un système des événements exhaustifs et mutuellement exclusifs (complet),
- $P(A_i)=p_i$ et $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$ et calculons la probabilité qu'en faisant n expériences indépendantes on ait x_1 fois l'evénement A_1, x_2 fois A_2,…etc, où $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$.

Loi multinomiale:

- Cette probabilité est donnée par:

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \quad si \ n = \sum_{i=1}^{k} x_i$$

et zéro, autrement. Avec $X_i = x_i$ signifie que l'événement A_i s'est réalisé x_i fois.

- Alors, on dit que la variable $(X_1, \ldots, X_k)$ suit une loi multinomiale de paramètres n, p_1, p_2,…,p_k
- Si k=2, on retrouve la loi binomiale.

En effet,

$$P(X_1 = x_1, \cdots; X_k = x_k) = C_n^{x_1} C_{n-x_1}^{x_2} C_{n-x_1-x_2}^{x_3} \cdots C_{n-x_1-x_2-\cdots-x_{k-1}}^{x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

$$P(X_1 = x_1, \cdots; X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \cdot \frac{(n-x_1-x_2)!}{x_3!(n-x_1-x_2-x_3)!}$$

$$\cdots \frac{(n-x_1-x_2-\cdots-x_{k-1})!}{x_k!\,0!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

Loi multinomiale:

- Les principaux moments de cette loi sont:

$$E(X_i)=np_i$$
$$Var(X_i)=np_i(1\text{-}p_i)$$
$$Cov(X_i,X_j)=\text{-}np_ip_j$$

Cas particulier:

- Considérons la loi trinômiale:

$$P(X=x,Y=y)=\frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$$

où $(x,y)\in \mathbf{Z}_+^2$ et $p_j\geq 0$ avec $p_1+p_2+p_3=1$.

- La loi marginale de X est B(n,p_1).
- La loi marginale de Y est B(n,p_2).

Cas particulier:

$$P(X=x)=\sum_{y=0}^{n-x}\frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}p_1^x\,p_2^y\,p_3^{n-x-y}$$

$$=\frac{n!}{x!(n-x)!}p_1^x\sum_{y=0}^{n-x}\frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!}p_2^y\,p_3^{n-x-y}$$

$$=C_n^x\,p_1^x(p_2+p_3)^{n-x}$$

$$=C_n^x\,p_1^x(1-p_1)^{n-x}$$

Exemple:

- Une urne contient 9 boules (dont 2 sont rouges, 3 blanches et 4 noires).
- On tire au hasard, avec remise, 3 boules de cette urne.
- En désignant par X, Y et Z le nombre de boules rouges, blanches et noires tirées, on détermine la loi $P(X=i, Y=j, Z=k)$ avec $i+j+k=3$.

Exemple:

- La distribution relative à ces 3 variables est en fait une distribution à 2 dimensions puisque la valeur de la 3ème variable est déterminée par celles de deux premières: Z=3-X-Y.
- On a: $p_1 = \frac{2}{9}, p_2 = \frac{3}{9}, \text{et } p_3 = \frac{4}{9}$
- Les probabilités $P(X=i, Y=j, Z=k)$ sont calculées à l'aide de

$$P(X = i, Y = j, Z = k) = P(i, j, k) = \frac{3!}{i!\,j!\,k!}\left(\frac{2}{9}\right)^i\left(\frac{3}{9}\right)^j\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

Exemple:

- On obtient alors:

P(0,0,3)=0,0878

P(0,1,2)=0,1975

P(0,2,1)=0,1481

P(0,3,0)=0,0371

P(1,0,2)=0,1317

P(1,1,1)=0,1975

P(1,2,0)=0,0741

P(2,0,1)=0,0658

P(2,1,0)=0,0494

Loi hypergéométrique:

- On considère une urne contenant N boules dont a sont blanches et b=N–a sont rouges. On tire de cette urne n boules. (On peut tirer les n boules en même temps ou l'une après l'autre sans remise).
- Soit X la v.a. égale au nombre de boules blanches tirées parmi les n boules. Cette v.a. suit une loi dite hypergéométrique et est notée $H(n,a,b)$.

Loi hypergéométrique:

- Comme $0 \leq X \leq a$ et $0 \leq n-X \leq b$, on a:

$$\max\{0,n-b\} \leq X \leq \min\{a,n\}$$

- Soit un nombre entier k tel que:

$$\max\{0,n-b\} \leq k \leq \min\{a,n\}$$

- On cherche $P(X=k)$. L'ensemble fondamental Ω est constitué de tous les sous-ensembles de n boules que l'on peut tirer de l'urne $\Omega=\mathscr{P}_n(E)$. C'est l'ensemble de parties à n éléments de l'ensemble E des boules. On a $Card\,\Omega = C_{a+b}^{n}$

Loi hypergéométrique:

- Le nombre de façons de tirer *k* boules parmi les *a* blanches est C_a^k et pour chacune de ces façons il y a C_b^{n-k} manières de tirer *n–k* boules parmi les boules rouges. Donc:

$$P(X=k)=\frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

- Comme $\sum_k C_a^k C_b^{n-k}=C_{a+b}^n$ on a bien $\sum_k P(X=k)=1$

Loi hypergéométrique:

- Espérance mathématique de $X \sim H(n,a,b)$

$$E(X)=\frac{an}{a+b}$$

- Sa variance est:

$$Var(X)=\frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

- Fonction génératrice des moments?

Loi de Poisson:

- On dit qu'une v. a. obéit à une loi de Poisson, si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs entières 0,1,2,…,k,…,n,… les probabilités associées étant $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n, \ldots$ avec

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

- λ étant un paramètre positif, et e la base des logarithmes népériens.
- La constante λ s'appelle le paramètre de la loi.
- La loi de Poisson est notée $\mathscr{P}(\lambda)$.

Loi de Poisson:

- Espérance mathématique: $E(X)=\lambda$
- Variance mathématique: $Var(X)=\lambda$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$
- La loi de Poisson est appelée loi des petites probabilités. On l'utilise pour représenter des phénomènes rares, tels que: nombre d'accidents, nombre de pannes, nombre de déchets dans une fabrication…

Loi géométrique:

- On considère une expérience à deux issues possibles (réalisation de l'événement A ou de l'événement $\bar{A}$). On répète indéfiniment cette expérience jusqu'à ce que A se réalise. Soit X la v.a. égale au nombre de répétitions nécessaires pour la réalisation de A.
- On a: $X(\Omega)=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ et $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ où p est la probabilité de réalisation de l'événement A.

Loi géométrique:

- On vérifie que c'est bien une loi de probabilité.
- En effet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

- Son espérance mathématique est:

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Loi binomiale négative:

- Une proportion p d'éléments d'une population possède un certain caractère A. On veut obtenir n éléments de ce type en procédant à une suite de tirage indépendants. Ces tirages s'effectuent avec remise. On désigne par Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir ces n éléments possédant le caractère A. La v.a. $X=Y-n$ est appelée binomiale négative.

Loi binomiale négative:

- On a $X(\Omega)=IN$. On cherche $P(X=i)$.
- Comme n tirages (dont le dernier) ont donné un élément possédant le caractère A et i tirages ont donné un élément ne possédant pas le caractère A, la probabilité d'un tel événement est $p^n(1-p)^i$. Le nombre de ces événements est C_{n+i-1}^{n-1} . On en déduit:

$$\forall i \in X(\Omega),\ P(X=i)=C_{n+i-1}^{n-1}p^n(1-p)^i$$

Loi binomiale négative:

- On peut vérifier que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i-1}^{n-1} p^n (1-p)^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i-1}^{i} p^n (1-p)^i = 1$$

- Son espérance mathématique est:

$$E(X) = n\frac{1-p}{p}$$

- Sa variance est: $Var(X) = \frac{n}{p^2}(1-p)$

Loi uniforme discrète:

- Une v.a. X discrète suit une loi uniforme en n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si sa distribution de probabilité est:

$$p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n}; \quad k = 1, \ldots, n$$

- Si n=1, alors on retrouve la loi de Dirac dégénérée en un point a.
- **Exemples:** pièce de monnaie(n=2), le dé (n=6).

Fonctions génératrices des moments de quelques lois discrètes usuelles

Loi binomiale:

- La fonction génératrice des moments d'une loi binomiale $B(n,p)$ de paramètres n et p est:

$$M(t) = \left(pe^t + q\right)^n \; ; \; avec\; q = 1 - p$$

- **Dém:** T.D. série n°2, Ex. 10

Loi de Poisson:

- La fonction génératrice des moments d'une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ de paramètre λ est:

$$M(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

- **Dém:** T.D. série n°2, Ex. 10

Loi géométrique:

- La fonction génératrice des moments d'une loi géométrique de paramètre p est:

$$M(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

où q=1-p et t est telle que qe^t<1

Dém: T.D. série n°2, Ex. 10

Loi binomiale négative:

- La fonction génératrice des moments d'une loi binomiale négative de paramètres n et p est:

$$M(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^n$$

Résultat: Si $X_1,\ldots, X_n$ sont des v.a. indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre p, alors leur somme suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.

Loi binomiale négative:

- Réciproquement, toute v.a. binomiale négative peut s'écrire comme somme de v.a. qui suivent toutes la même loi géométrique.

- Donc, la fonction génératrice des moments d'une loi binomiale négative est égale au produit de n fois la fonction génératrice des moments de la loi géométrique de paramètre p.

Lois de probabilités continues

Loi uniforme:

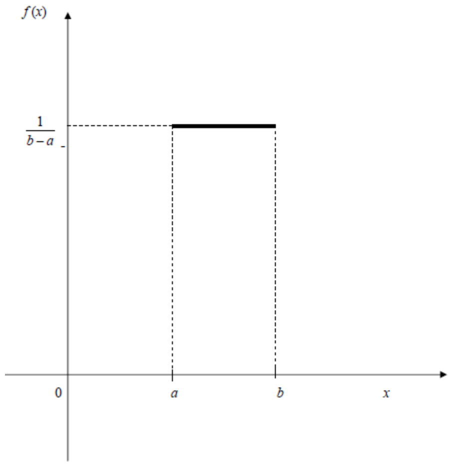
- Une v.a. continue X suit une loi uniforme si sa densité de probabilité est donnée par:

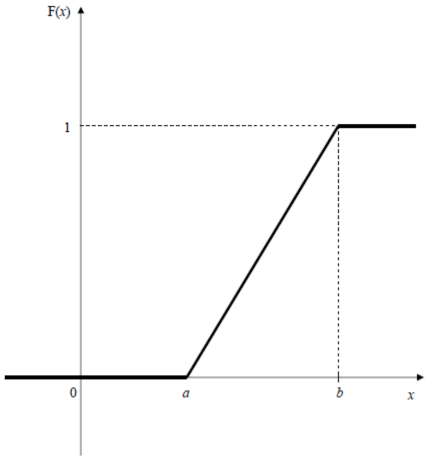
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b \\ 1, & \text{si } x > b \end{cases}$$

Loi uniforme:





Loi uniforme:

- L'espérance d'une v.a. continue $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ est:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Loi uniforme:

- La fonction génératrice des moments d'une loi uniforme continue sur un intervalle [a,b] est:

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}; \quad (si\ t \neq 0)$$

$$M(0) = 1$$

- **<u>Dém</u>:** voir T.D. Série n°2, Ex. 11

Loi exponentielle:

- Une v.a. X continue suit la loi exponentielle, de paramètre $\lambda>0$, notée $X \sim \varepsilon xp(\lambda)$, si sa densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

- Alors son espérance mathématique est: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- Sa variance sera: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Son écart-type est alors: $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

Loi exponentielle:

- Sa fonction génératrice des moments est donnée par:

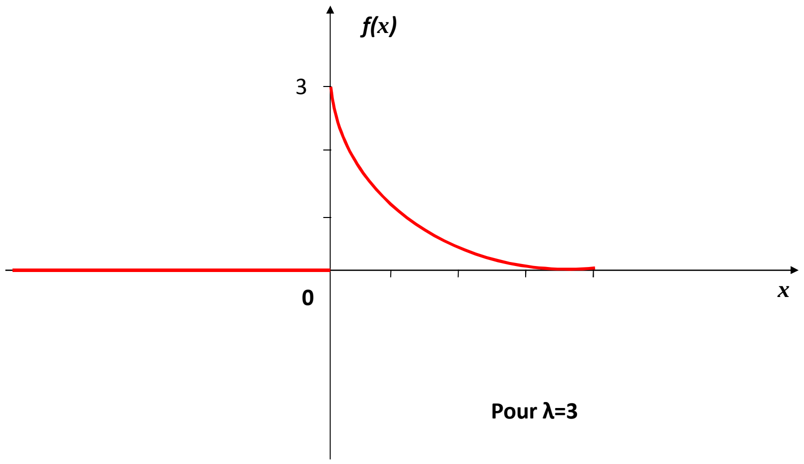
$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \frac{\lambda}{\lambda - t} \;;\quad t < \lambda$$

Loi exponentielle:

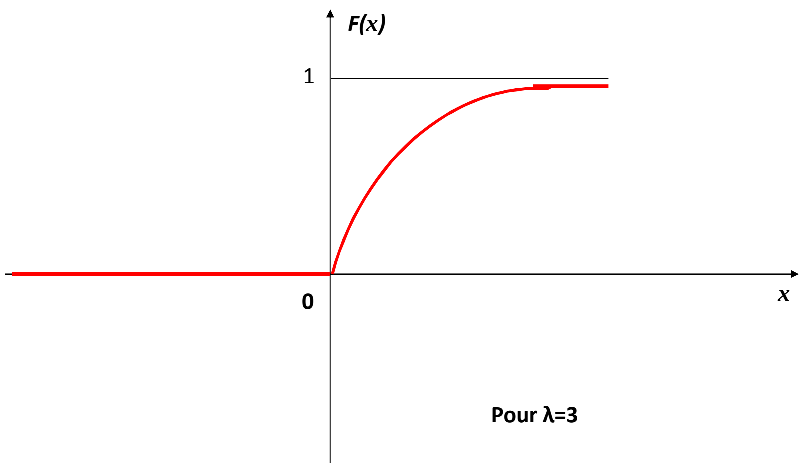
- La fonction de répartition $F(x)$ d'une v.a. X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Représentation graphique de f(x):



Représentation graphique de F(x):



Champs d'application:

- D'abord, on l'applique pour modéliser la demande, en gestion de stock, lorsque la symétrie n'est pas vérifiée et lorsqu'on remarque que son écart-type est égal à son espérance (sa moyenne).
- Mais en général, la loi exponentielle (négative) s'applique pour modéliser les phénomènes de désintégration. La v.a. X est alors la durée de vie du phénomène.

49

Loi Gamma:

- Une v.a. X suit une loi gamma de paramètres α>0 et β>0 si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}, & si \;\; x \geq 0 \\ 0, & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

50

Loi Gamma:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi gamma de paramètres α>0 et β>0 est: $$E(X)=\frac{\alpha}{\beta}$$
- En effet, en posant $\beta x=t$, on a:

$$E(X)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-\beta x}x^{\alpha}dx=\frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

- Sa variance est: $Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$

Loi Gamma:

- On peut montrer que la fonction génératrice des moments d'une loi Gamma de paramètres α>0 et β>0 est:

$$M(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}; \qquad \forall t<\beta$$

Loi de Weibull:

- Une v.a. X suit une loi de Weibull de paramètres α>0 et β>0 si sa densité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}, & si\ \ x \geq 0 \\ 0, & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta\alpha x}, & si\ \ x \geq 0 \\ 0, & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

Loi de Weibull:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Weibull de paramètres α>0 et β>0 est:

$$E(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$$

- En effet, en posant $\beta x=t$, on démontre, comme on a vu pour la loi gamma, le résultat.
- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}$$

Loi de Pareto:

- Une v.a. X suit une loi de Pareto de paramètre α si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{c_0}\left(\dfrac{c_0}{x}\right)^{\alpha+1} & ; \text{ si } c_0 \leq x \\ 0; & \text{sinon} \end{cases}$$

- Son espérance mathématique pour α>1:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} c_0$$

- Sa variance (existe pour α>2):

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} c_0$$

55

Loi Bêta:

- Une v.a. X suit une loi bêta de paramètre α et β si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}; & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad ; & \text{sinon} \end{cases}$$

où α et β sont des constantes positives et $B(\alpha, \beta)$ est la fonction bêta d'Euler:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \ ; \quad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

56

Loi Bêta:

- L'espérance d'une v.a. X suit une loi bêta de paramètre α et β est: $E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- En effet,

$$E(X)=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

- Sa variance est:

$$Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

57

Loi de Cauchy C(α,λ):

- Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètres α et λ>0 si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\alpha)^2} \quad , \quad x\in]-\infty,+\infty[$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Arc\,tg\,\frac{x-\alpha}{\lambda}$$

58

Loi de Cauchy C(0,1):

- Une v.a. X suit une loi de Cauchy $C(0,1)$ de paramètres 0 et 1, si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad , \quad x\in IR$$

- Les paramètres ici, ne sont pas l'espérance et l'écart-type (qui n'existent pas pour cette loi)!
- La fonction $M_X(t)$ n'existe non plus!

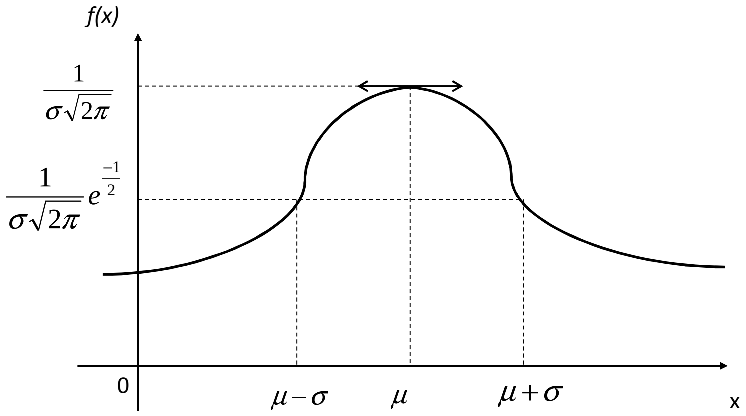
Loi Normale $N(\mu,\sigma)$:

- Une v.a. continue X suit une loi normale de paramètres μ et σ>0 si sa densité de probabilité est:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \; ; \; x\in]-\infty,+\infty[$$

- On note X~$N(\mu,\sigma)$.
- La loi normale est encore connue sous le nom de loi de Gauss ou de Laplace-Gauss.

Représentation graphique de $N(\mu,\sigma)$:



61

Loi Normale $N(\mu,\sigma)$:

- La fonction de répartition de X est définie par:

$$F(x)=P(X\leq x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

- On peut montrer que:

$$E(X)=\mu$$

et

$$Var(X)=\sigma^2$$

Prof. Mohamed El Merouani 62

Loi Normale $N(\mu,\sigma)$:

- La fonction génératrice des moments d'une loi $N(\mu,\sigma)$ est:

$$M(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad ; \quad \forall t \in IR$$

- **<u>Dém</u>:** voir T.D. Série n°2, Ex. 11

Loi Normale centrée, réduite :

- Si X suit une loi normale $N(\mu,\sigma)$, alors la v.a.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

centrée réduite associée à X , suit une loi normale $N(0,1)$, dite loi normale centrée, réduite.

Loi Normale centrée réduite:

- En effet, Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ et z ∈ IR. On a:

$$P(Z \le z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) = P(X \le z\sigma + \mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- En posant $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$, on obtient

$$P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

65

Loi Normale centrée réduite:

Z est donc une v.a. continue dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in IR$$

C'est-à-dire $Z \sim N(0,1)$.

66

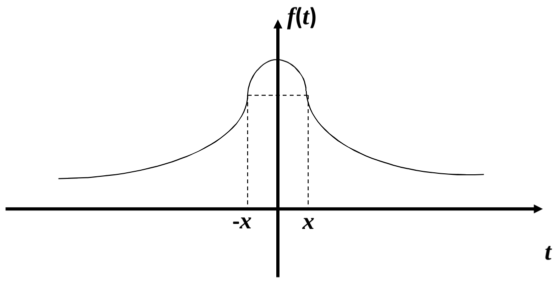
Loi Normale centrée réduite:

- La fonction génératrice des moments d'une loi $N(0,1)$ est:

$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \; ; \quad \forall t \in IR$$

- **Dém:** voir T.D. Série n°2, Ex. 11

Allure et propriété de la loi normale réduite:



C'est une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car elle est paire $f(-x)=f(x)$

Ainsi les tables de la loi normale centrée réduite, donnent les valeurs de la fonction $f(t)$ uniquement pour des valeurs positives de la variable t.

La probabilité pour que $T \sim N(0,1)$ prenne une valeur de l'intervalle (t_1,t_2)

- S'écrit alors:

$$P(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Propriétés:

- On démontre que:

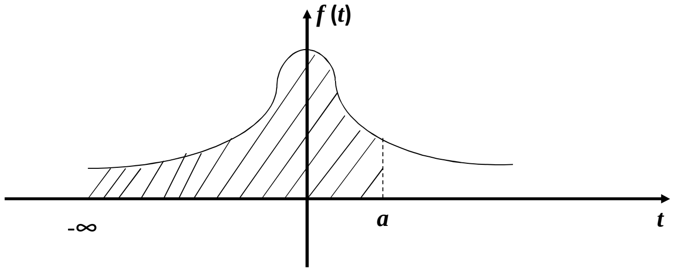
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

- L'aire comprise entre la courbe $N(0,1)$ et l'axe des t est égale à l'unité.

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite:

- On définit la fonction de répartition Φ(t) de la loi normale centrée réduite, comme:

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$



Loi Normale centrée réduite:

- On peut ramener tout calcul sur la fonction de répartition d'une v.a. normale $N(\mu,\sigma)$ à un calcul sur la fonction de répartition, notée $\Phi(x)$, d'une v.a. normale $N(0,1)$.
- En effet, si $X \sim N(\mu,\sigma)$,

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Loi Normale centrée réduite:

- Soit Φ la fonction de répartition de $X \sim N(0,1)$.
  On a: $\Phi(a)=1-\Phi(-a)$.
- En effet, comme

$$\Phi(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et

$$\Phi(a) + \Phi(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

Exemple:

La taille d'un groupe de 2000 personnes obéit à une loi normale N(170 cm, 5 cm).

On demande de déterminer:

1. Le nombre de personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.
2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm.

Solution:

1. Définissons la variable centrée réduite T à partir de la variable aléatoire X:

$$T = \frac{X - 170}{5}$$

- Alors P(168<X<175)=P(-0,4≤t≤+1)=
  =Φ(1)- Φ(-0,4)= Φ(1)-(1- Φ(0,4))=
  =Φ(1)+ Φ(0,4)-1

  Soit, en cherchant les valeurs de Φ(1) et de Φ(0,4) dans la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite: croisement de la ligne 1,0 et de la colonne 0,00; croisement de la ligne 0,4 et de la colonne 0,00.

D'où P(168≤X≤175)=0,8413+0,6554-1=0,4967

Il y a donc: 2000x0, 4967≈993personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.

2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm est:

   P(X>180)=P(T>2)=1- Φ(2)=1-0,9772=0,0228 soit une probabilité de 2,3%.

   Il y a alors vraisemblablement 2000x0,0228≈45personnes dont la taille dépasse 180cm.

Loi Log-normale bi-paramètrique:

- Une variable aléatoire X est dite suivant une loi de probabilité Log-normale de paramètres μ et σ si la v. a. Y=Log X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
- On note $X \sim \Lambda(\mu, \sigma)$
- Alors, la densité de probabilité de Y est:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- et celle de X sera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(Log\, x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad x > 0$$

Espérance et variance:

- Soit $X \sim \Lambda(\mu, \sigma)$, son espérance est:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

- Et sa variance est:

$$Var(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)\{\exp(\sigma^2) - 1\}$$

Loi Log-normale:

- Soit X une v.a. qui suit une loi Log-normale. Alors, la fonction $M(t)=E[e^{tX}]$ n'est pas définie pour $t>0$;
- En d'autres termes, la loi Log-normale n'admet pas de fonction génératrice des moments qui soit définie dans un intervalle ouvert contenant $t=0$.
- Néanmoins, X admet des moments de tous les ordres entiers positifs.

Loi Log-normale tri-paramètrique:

- Une variable aléatoire X qui peut prendre une valeur qui dépasse une valeur fixée τ est dite suivant une loi Log-normale de trois paramètres τ, μ et σ si $Y=\text{Log}(X-\tau)$ suit une loi normale de paramètres μ et σ.
- On note $X \sim \Lambda(\tau,\mu,\sigma)$
- Le troisième paramètre τ s'appelle le seuil.
- Ainsi, la log-normale de 2 paramètres est un cas particulier de celle de 3 paramètres avec $\tau=0$.

Fonction de densité de probabilité:

- Soit $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$, alors sa fonction de densité de probabilité est:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-\tau)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{Log(x-\tau)-\mu\}^2\right] & si\ \tau < x < \infty \\ 0 & si\ x \leq \tau \end{cases}$$

Espérance et variance:

- Soit $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$, alors,
- Son espérance est:

$$E(X) = \tau + \exp(\mu + \sigma)$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = e^{\mu^2}\left[e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)\right]$$

Loi du Khi-deux:

- Une v.a. X suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté (ddl en abrégé) si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}; & si\, x > 0 \\ 0; & si\, x \leq 0 \end{cases}$$

- On note $X \sim \chi^2(n)$
- Si $\frac{n}{2} = \alpha$ et $\frac{1}{2}$ $=\beta$, on retrouve la loi Gamma.

Loi du Khi-deux:

- On peut montrer que:

Si X_1, X_2,…, X_n sont n v.a. indépendantes qui suivent respectivement des lois normales $N(\mu_1,\sigma_1)$, $N(\mu_2,\sigma_2)$, …, $N(\mu_n,\sigma_n)$, alors la v.a.

$Z = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$ suit une loi de $\chi^2(n)$ khi-deux

à n degrés de liberté

Loi du Khi-deux:

- C'est-à-dire:

  Si Z_1, Z_2,…, Z_n sont n v.a. indépendantes qui suivent respectivement des lois normales centrées réduites $N(0,1)$ alors la v.a.

  $$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$ suit une loi de $\chi^2(n)$ khi-deux

  à n degrés de liberté

Loi du Khi-deux:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté est: $E(X)=n$
- Sa variance est: $Var(X)=2n$

Loi du Khi-deux:

- On peut montrer que la fonction génératrice des moments d'une loi de Khi-deux à n degrés de liberté est:

$$M(t) = (1-2t)^{-n/2} \; ; \quad \forall t < \frac{1}{2}$$

Loi de Student:

- Une v.a. X suit une loi de Student à n degrés de liberté si sa densité de probabilités est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \; ; \quad x \in IR$$

- On note $X\sim T(n)$
- Pour n=1, on retrouve la loi de Cauchy et on a:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad et \quad f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} ; \; x \in IR$$

Loi de Student:

- On peut montrer que:

  Si X est une v.a. normale centrée réduite $N(0,1)$, si Y est une v.a. de $\chi^2(n)$ khi-deux à n degrés de liberté, et si X et Y sont indépendantes, alors la v.a.

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

suit une loi $T(n)$ de Student à n degrés de liberté

Loi de Student:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Student à n degrés de liberté est: $E(X)=0$

- Sa variance est: $Var(X) = \frac{n}{n-2}$

Loi de Fisher-Snédecor:

- Une v.a. X suit une loi de Fisher-Snédecor à p et q degrés de liberté si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} x^{\frac{p}{2}-1}}{\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{\frac{p+q}{2}}}; \qquad x \geq 0$$

- On note $X \sim F(p,q)$

Loi de Fisher-Snédecor:

- On peut montrer que:

Si X_1 *et* X_2 sont deux v.a. indépendantes distribuées respectivement suivant une loi de Khi-deux χ^2 à n_1 et n_2 degrés de liberté, alors la v.a.

$$F = \frac{\frac{1}{n_1} X_1}{\frac{1}{n_2} X_2}$$

suit une loi de Fisher-Snédecor $F(n_1, n_2)$ à n_1 et n_2 degrés de liberté

Loi de Fisher-Snédecor:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Fisher-Snédecor $F(p,q)$ à p et q degrés de liberté est:

$$E(X)=\frac{q}{q-2},\quad (q>2)$$

- Sa variance est:

$$Var(X)=\frac{2q^2(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)},\quad (q>4)$$

Compléments à propos de la fonction génératrice des moments

Théorème:

- On peut montrer que si une v.a. X admet une fonction génératrice des moments $M_X(t)$, alors elle admet des moments de tous les ordres (entiers positifs).
- La réciproque n'est pas toujours vraie: une v.a. peut admettre des moments de tout les ordres entiers positifs, sans admettre de fonction génératrice des moments.
- **Contre-exemple**: La loi Log-normale

Théorème d'unicité:

- La fonction génératrice des moments d'une v.a. détermine la loi de cette variable.
- En d'autres termes, si deux v.a. admettent même fonction génératrice des moments, alors elles ont même loi.

Théorème:

- Soient X et Y deux v.a. **indépendantes** dont chacune admet une fonction génératrice des moments ($M_X(t)$ et $M_Y(t)$, respectivement).
- Alors la somme $X+Y$ admet une fonction génératrice des moments et l'on a:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t).M_Y(t)$$

<u>Dém:</u>

- On a: $M_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left[e^{tX}.e^{tY}\right]$
- Comme X et Y sont indépendantes, les variables e^{tX} et e^{tY} le sont aussi. Donc:

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{tX}\right).E\left(e^{tY}\right) = M_X(t) \,.\, M_Y(t)$$

<u>**Remarque:**</u>

- La réciproque n'est pas vraie. Si pour deux v.a. X et Y on a: $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \,.\, M_Y(t)$ ceci n'implique pas forcement qu'elles sont indépendantes.

Corollaire:

- Le produit de deux fonctions génératrices des moments est une fonction génératrice des moments.

Addition de variables aléatoires indépendantes

Addition de variables aléatoires binomiales indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi binomiale $\mathrm{B(n,p)}$ et Y une v. a. obéissant à une loi binomiale $\mathrm{B(m,p)}$.
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:

➢ La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi binomiale $\mathrm{B(n+m,p)}$

<u>Dém:</u> T.D. Série n°2, Ex. 9

Addition de variables aléatoires de Poisson indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\lambda)$ et Y une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\mu)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:

➢ La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson $P(\lambda+\mu)$.

Addition de deux variables aléatoires Gamma indépendantes:

- Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives gamma de paramètres α_1 et α_2 et avec le même β >0. Alors la somme $X+Y$ a pour loi gamma de paramètres $\alpha_1+\alpha_2$ et β.

- **Dém:** Il résulte de la forme de la fonction génératrice des moments.

103

Addition de variables aléatoires normales indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi normale $N(\mu_x, \sigma_x)$ et Y une v. a. obéissant à une loi normale $N(\mu_y, \sigma_y)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:

➢ La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi normale $N(\mu_z, \sigma_z)$

❖ de moyenne $\mu_z = \mu_x + \mu_y$

❖ d'écart-type $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

Dém: T.D. Série n°2, Ex. 12

104

➢ La v.a. V=X-Y suit une loi normale $N(\mu_v, \sigma_v)$

❖ de moyenne $\mu_v = \mu_x - \mu_y$

❖ d'écart-type $\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

- Ce résultats peut se généraliser au cas de n variables indépendantes.

Addition de deux variables aléatoires Khi-deux indépendantes:

- Si X et Y sont deux v.a. indépendantes suivant des lois de Khi-deux respectivement à n_1 et n_2 degrés de liberté, alors la v.a. Z=X+Y suit aussi une loi de Khi-deux de n_1+n_2 degrés de liberté.
- Ce résultat découle directement du fait que la loi de Khi-deux est une somme de carrées des lois normales centrées réduites indépendantes.