Corrigés de la série n° 4 de Probabilités et Statistiques

Exercice 1 :
Soit la variable aléatoire X_1 désignant le nombre de boules blanches prélevées dans l'urne 1 et la v.a. X_2 désignant le nombre de boules blanches prélevées dans l'urne 2.
L'événement "tirer une boule blanche" correspond à un succès et le tirage des 7 boules de l'urne 1 se fait sans remise. Donc, il s'agit d'une loi hypergéométrique de paramètres : $N = 50$; $a = 20$; $b = 30$ et $n = 7$.

$$X_1 \sim H(7, 20, 30)$$

Comme il s'agit d'une population finie de taille élevée, la loi hypergéométrique peut être approchée par la loi binomiale de paramètres : $n = 7$ et $p = \frac{20}{50} = 0,4$

$$X_1 \approx B(7; 0,4).$$

Dans l'urne 2 aussi l'événement "tirer une boule blanche" correspond à un succès et le tirage des 7 boules se fait sans remise. Donc, il s'agit aussi d'une loi hypergéométrique mais de paramètres : $N = 250$; $a = 100$; $b = 150$ et $n = 7$.

$$X_2 \sim H(7, 100, 150)$$

Comme il s'agit d'une population finie de taille élevée, la loi hypergéométrique peut être approchée par la loi binomiale de paramètres : $n = 7$ et $p = \frac{100}{250} = 0,4$

$$X_2 \approx B(7; 0,4).$$

On obtient plus de boules blanches que de boules noires pour l'ensemble des 14 boules prélevées lorsque le nombre total de boules blanches prélevés dans les deux urnes est supérieur à 7.

$$P(X_1 + X_2 > 7)$$

X_1 et X_2 étant deux v.a. binomiales de même probabilité de succès, leur somme est aussi une v.a. binomiale de paramètres : $n = 7 + 7 = 14$ et $p = 0,4$.

$$X_1 + X_2 \sim B(14; 0,4)$$

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 > 7) &= 1 - P(X_1 + X_2 \leqslant 7) \\ &= 1 - \Sigma_{k=0}^{7} P(X_1 + X_2 = 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{k=0}^{7} P(X_1 + X_2 = 7) &= \Sigma_{k=0}^{7} C_{14}^{k} (0,4)^k (1 - 0,4)^{14-k} \\ &= 0,0008 + 0,0073 + 0,0317 + 0,0845 + 0,1549 + 0,2066 + 0,2066 + 0,1574 \\ &= 0,8498 \end{aligned}$$

d'où $P(X_1 + X_2 > 7) = 1 - 0,8498 = 0,1502$
Donc, il y a 15 % de chances d'obtenir plus de boules blanches que boules noires pour l'ensemble des 14 boules prélevées.

Exercice 2 :
1°) Soit X la v.a. qui désigne le nombre de pièces défectueuses.
L'évènement "pièce défectueuse" correspond à un succès. On est bien dans les conditions d'utilisation d'une loi binomiale dont les paramètres sont : $n = 10$ et $p = 0,01$.

$$X \sim B(10; 0,01)$$

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$
$$P(X = 2) = C_{10}^2 (0,01)^2 (1 - 0,01)^8 = 0,0042$$

Il y a un risque de $0,42\%$ d'avoir 2 pièces défectueuses.
2°) La probabilité de succès tend vers zéro ($p = 0,01$), la loi binomiale de paramètres n et p tend vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.
On peut dans ce cas effectuer les calculs de probabilités de fa§on approximative à l'aide de la formule de la loi de Poisson.

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda = np = 0,1)$$
$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-0,1}(0,1)^2}{2!} = 0,0045$$

On peut constater que l'approximation est satisfaisante.

Exercice 3 :
1°) Désignons par X le nombre d'étudiants qui réussissent l'examen.
X est une v.a. discrètre qui prend les valeurs entières de 0 à 100. Elle suit une loi binomiale de paramètres 100 et $0,8$.

$$X \sim B(100; 0,8)$$

La probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen est :

$$P(X \geqslant 75)$$

on a $n = 100$ est grand et $npq = 100 \times 0,8 \times 0,2 = 16 \geqslant 3$. On peut donc effectuer le calcul de cette probabilité d'une manière approchée à l'aide de la loi normale de paramètres $\mu = np = 80$ et $\sqrt{npq} = 4$.

$$X \approx N(80; 4).$$

Pour améliorer la qualité de l'approximation, on introduit la correction de continuité, la probabilité $P(X \geqslant 75)$ devient :

$$P(X \geqslant 75 + 0,5) = P(X \geqslant 75,5)$$

$$= 1 - P(X < 75,5)$$

$$P(X \geqslant 75) = 1 - P\left(\frac{X - 80}{4} < \frac{75,5 - 80}{4}\right)$$
$$= 1 - P(Z < -1,13)$$
$$P(X \geqslant 75) = 1 - \Phi(-1,13) = \Phi(1,13)$$

Par la table de la loi normale centré réduite on a : $\Phi(1,13) = 0,8708$

$$P(X \geqslant 75) \approx 0,8708$$

La probabilité pour qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen est à peu près $0,8708$.
Le calcul exact à partir de la binomiale donne un résultat de $0,8686$. On constate que l'approximation est très satisfaisante.
2°) Nombre d'étudiants pour lesquels la probabilité qu'au moins de 100 réussissent est égale à $0,99$.

$$X \sim B(n; 0,8) \approx N(0,8n; 0,4\sqrt{n})$$

$$P(X \geqslant 100 + 0,5) = 1 - P(X < 100,5)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} < \frac{100,5 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,99$$

$$P(X \geqslant 100,5) = 1 - P\left(Z < \frac{100,5 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,99$$

$$1 - \Phi\left(\frac{100,5 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,99 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0,8n - 100,5}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,99$$

En consultant la table de la loi normale, on trouve : $\Phi(2,33) = 0,99$.

$$\Rightarrow \frac{0,8n - 100,5}{0,4\sqrt{n}} = 2,33$$

$$\Rightarrow 0,8n - 100,5 = 2,33 \times 0,4\sqrt{n} = 0,932\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow 0,8n - 0,932\sqrt{n} - 100,5 = 0$$

On pose $x = \sqrt{n}$

$$0,8x^2 - 0,932x - 100,5 = 0$$

$$\Delta = (-0,932)^2 - 4 \times 0,8 \times (-100,5) = 322,47$$

$$x = \frac{0,932 + \sqrt{322,47}}{2 \times 0,8} = 11,8 \quad \text{(on choisit la solution positive)}$$

$$\sqrt{n} = 11,8 \Rightarrow n = 140 \ \text{ étudiants.}$$

Exercice 4 :
1°) Les prélèvements s'effectuent avec remise donc dans ce cas la v.a. X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p. On sait que $E(X_n) = np$ et $Var(X_n) = npq$. Alors on aura :

$$E(f_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n}np = p$$

$$Var(f_n) = Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_n) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchybechev on a :

$$P(|f_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P(|f_n - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow lim_{n \to +\infty} P(|f_n - p| < \varepsilon) = 1$$

car $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \to_{n \to +\infty} 0$

2°) Les prélèvements s'éffectuent sans remise donc dans ce cas la v.a. X_n suit une loi hypergéométrique de paramétre N, n et p Dans le modèle tel que nous l'avons vu, on a : $N = a+b$, $p = \frac{a}{N}$ et $q = 1 - p = \frac{b}{N}$
et on a trouvé : $E(X_n) = n\frac{a}{a+b} = \frac{an}{N} = np$ et $Var(X_n) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)} = \frac{nab(N-n)}{N^2(N-1)} = npq\frac{N-n}{N-1}$
Alors, on aura : $E(f_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n}np = p$

$$Var(f_n) = Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_n) = \frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}npq = \frac{N-n}{N-1}\frac{pq}{n}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchybechev, on a :

$$P(|f_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{N-n}{N-1}\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P(|f_n - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{N-n}{N-1}\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow lim_{n\to+\infty}P(|f_n - p| < \varepsilon) = 1$$

car $\frac{N-n}{N-1}\frac{pq}{n\varepsilon^2} \to_{n\to+\infty} 0$

Exercice 5 :
Désignons par X_i $(i = 1$ à $120)$ la somme à rembourser à chaque personne.
Désignons par X la somme totale que la caisse doit payer aux 120 personnes.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{120}$$

D'après le théorème central limite, on peut affirmer que X suit une loi normale de moyenne la somme des moyennes et d'écart-type la racine carrée de la somme des variances.

$$X \sim N(120 \times 1000; \sqrt{120 \times 600^2}) = N(120000; 6572,67)$$

La somme de $130000DH$ ne sera pas suffisante si la somme totale à rembourser aux 120 personnes dépasse $130000DH$:

$$P(X > 130000) = 1 - P(X \leqslant 130000)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - 120000}{6572,67} \leqslant \frac{130000 - 120000}{6572,67}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leqslant 1,52)$$

$$= 1 - \Phi(1,52) = 1 - 0,93574 = 0,0643$$

Donc, il y a un risque de $6,5\%$ pour que la somme de $130000DH$ ne soit pas suffisante pour rembourser toutes les personnes.

Exercice 6 :
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1 et soit S_n la v.a. $S_n = \Sigma_{j=1}^{n}X_j$.
La loi de S_n est la loi de Poisson de paramètre n ; on a donc :

$$P(S_n \leqslant n) = \exp(-n)\Sigma_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

Mais, d'après le théorème de limite central, on a, avec les notations du théorème :

$$P(S_n \leqslant n) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Exercice 7 :
Soit l'événement A "le dé présente une face de numéro impair".

$$P(A) = P(\{1;3;5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

. Soit X le nombre de fois qu'une face de numéro impair s'est présenté au cours de n lancers du dé

$$X \sim B(n; p = P(A) = \frac{1}{2})$$

$$E(X) = np = \frac{n}{2}$$

$$Var(X) = np(1-p) = \frac{n}{2}\frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

La moyenne du nombre X pour n lancers du dé est $\overline{X} = \frac{X}{n}$, d'où

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{2} \text{ et } Var(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{1}{4n}$$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchybechev pour la v.a. $\overline{X}$:

$$P(|\overline{X} - E(\overline{X})| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

$$P(\overline{X} - \frac{1}{2}| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Or, nous voudrions avoir

$$P(\overline{X} - \frac{1}{2}| \leqslant 0,01) \geqslant 0,95$$

On doit, donc, avoir $\varepsilon = 0,01$ et $1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leqslant 0,95$
ou encore $1 - 0,95 = 0,05 \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

$$\Rightarrow n \leqslant \frac{1}{4 \times 0,05 \times (0,01)^2}$$

$$\Rightarrow n \leqslant 50000$$

.