Chapitre 3: **Modèles non linéaires de la Finance**

Plan du chapitre 3:

- **Introduction**
- **Modèles de type ARCH,**
  - Propriétés d'un modèle ARCH(1)
  - Kurtosis d'un processus ARCH
  - Test d'un modèle de type ARCH
  - Estimation d'un modèle ARCH
- **Modèles de type GARCH**
  - Test d'un modèle de type GARCH
  - Estimation d'un modèle de type GARCH

Introduction

- Les modèles classiques de prévision fondés sur les modèles ARMA supposent des séries temporelles à variance constante (hypothèse d'homoscédasticité).
- Cette modélisation néglige donc, éventuellement, l'information contenue dans le facteur résiduel de la série.
- Les séries financières sont caractérisées par des périodes de forte spéculation (variabilité élevée) suivie de périodes d'accalmie (variabilité faible).

Introduction

- Les modèles de type **ARCH** (**A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroscedasticity) permettent de modéliser les séries financières qui ont une volatilité (ou variance ou variabilité) instantanée qui dépend du passé.
- Il est ainsi possible d'élaborer une prévision dynamique de la série en termes de moyenne et de variance.
- Présentés initialement par ENGLE (1928), les modèles ARCH ont connu des développements et des applications très importants durant la dernière décennie.

Modèles de type ARCH

Soit un modèle AR(p):

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Ou encore sous forme simplifiée:

$$\Phi(L) Y_t = \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t = u_t . h_t$

où $u_t \sim> N(0,1)$

et $$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

tel que $\alpha_0 > 0 \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i$

et $$\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_p L^p$$

5

Modèles de type ARCH

- h_t^2 est appelé processus ARCH d'ordre p et il est noté ARCH(p).
- Le modèle AR est dit modèle AR à erreurs ARCH(p).
- Les espérances et les variances conditionnelles sont égales, alors que les variances sont différentes:

$$E(\varepsilon_t) = E(u_t).E(h_t) = 0$$

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\varepsilon_t / I_{t-1}) = E(u_t / I_{t-1}).E(h_t / I_{t-1}) = 0$$

6

Modèles de type ARCH

- I_t constitue l'ensemble de l'information par rapport à laquelle la condition est définie.
- En termes conditionnels, il vient: $Var(\varepsilon_t / I_{t-1}) = h_t^2$ (quantité variable dans le temps).
- Le modèle reste correcte sur sa trajectoire-en moyenne- car l'espérance conditionnelle est toujours nulle.
- On peut vérifier que la variance conditionnelle est finie si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$

Modèles de type ARCH

- L'intérêt de cette formulation réside dans l'interdépendance d'une variable endogène au modèle.
- Pour Engle, cette notion est très importante en finance car le risque d'erreur n'est pas le même selon les périodes t: il y a alternance de périodes d'accalmie et de périodes d'euphorie.

Propriétés d'un modèle ARCH(1):

- Soit le modèle AR(p): $\Phi(L)Y_t=\varepsilon_t$
  avec $\varepsilon_t=u_t h_t$ où u_t ~> $N(0,1)$ et $h_t=\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}$
  soit $\varepsilon_t=u_t\times\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}$ où α_0>0 et $0\leq\alpha_1<1$
- La moyenne non conditionnelle est donnée par:

$$E(\varepsilon_t)=E\left[u_t\times\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)^{1/2}\right]=E(u_t)\times E\left[\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)^{1/2}\right]=0$$

  puisque par hypothèse nous avons $E(u_t)$=0.

- De même $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-i})$=0 puisque $E(u_t u_{t-i})$=0 pour i≠0

Propriétés d'un modèle ARCH(1):

- La variance (non conditionnelle) de ε_t est donnée par:

$$E(\varepsilon_t^2)=E\left[u_t^2\times\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)\right]=E(u_t^2)\times E\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right)$$

  Or σ_u^2=1 et la variance de ε_t est égale à celle de ε_{t-i}. La variance (non conditionnelle) de ε_t est donc égale à $E(\varepsilon_t^2)=\alpha_0/(1-\alpha_1)$.
- La moyenne et la variance non conditionnelles ne sont pas fonctions du temps.

Propriétés d'un modèle ARCH(1):

- La moyenne conditionnelle est donnée par:

$$E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots) = E(u_t) \times E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^{1/2} = 0$$

- La variance conditionnelle est:

$$E(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 = h_t^2$$

puisque σ_u^2=1.

- Ainsi dans une spécification de type ARCH seule la variance conditionnelle dépend des erreurs passées.

Kurtosis d'un processus ARCH

- Le Kurtosis est le rapport du moment centré d'ordre 4 sur le carré du moment centré d'ordre 2.
- Pour un processus ARCH(1), il vient:

$$k = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E^2(\varepsilon_t^2)} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}$$

- k est toujours supérieur à 3, un processus ARCH a donc une distribution leptokurtique qui permet de modéliser les phénomènes rares.

Test d'un modèle de type ARCH

- Soit un modèle de type ARCH telle que

$\varepsilon_t = u_t.h_t$ avec u_t ~> $N(0,1)$ et

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

- Soit l'hypothèse emboîtée H_0, H_0: $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_p=0$; contre l'hypothèse alternative H_1: α_i non tous nuls.
- Si l'hypothèse H_0 est acceptée, la variance de l'erreur est constante $\sigma_t^2=\alpha_0$.
- Dans le cas contraire les termes de l'erreur suivent un ARCH dont l'ordre p est à déterminer.

Test d'un modèle de type ARCH

- Le test est fondé soit sur un test de Fisher classique, soit sur le test du multiplicateur de Lagrange LM=$n \times R^2$ avec:

  n=nombre d'observations servant au calcul de la régression,

  R^2=coefficient de détermination
- Si LM>$\chi^2(p)$ à p degrés de liberté lu dans la table à un seuil α fixé (en général 0,05), on rejette H_0; on considère que le processus est justifiable d'un modèle ARCH(p).

Test d'un modèle de type ARCH

- Une autre approche consiste à calculer le corrélogramme des résidus aux carrés du modèle initial. Si des termes de ce corrélogramme sont significativement différents de 0, alors on peut conclure à une spécification de type ARCH.

Estimation d'un modèle ARCH

- Les méthodes usuelles d'estimation (maximum de vraisemblance, moindres carrés, méthodes non paramétriques) s'appliquent également aux modèles ARCH.
- Les méthodes du maximum de vraisemblance et des moindres carrés en deux étapes sont les plus utilisées.

Estimation d'un modèle ARCH

- La plupart des aléas relatifs aux séries financières ne suivent pas une loi normale. Toutefois, la densité gaussienne peut être utilisée pour calculer l'estimateur même si la vraie distribution n'est pas normale.
- Sous la supposition de la normalité, la Log-vraisemblance conditionnelle à la date t est donnée par:

$$\ell_t = Cte - \frac{1}{2} Log\, h_t^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}$$

Pr. Mohamed El Merouani 17

Estimation d'un modèle ARCH

- La Log-vraisemblance, pour un échantillon de taille n, s'écrit:

$$L = Cte - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} Log\left(h_t^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\right)$$

- L'estimation des coefficients α par MCG donne l'équation: $h_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{p}\hat{\alpha}_i \varepsilon_{t-i}^2$
- Le test précédent permet de déterminer l'ordre p du processus ARCH donc d'estimer les paramètres de l'ARMA (ou de la régression) et α.

Pr. Mohamed El Merouani 18

Modèles de type GARCH

- Le modèle GARCH (Bollerslev T. 1988) est une généralisation (Generalized) des modèles de type ARCH.
- Un processus GARCH(p,q) est défini par:

$\varepsilon_t = u_t.h_t$ avec u_t ~> $N(0,1)$ et

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}^2$$

$$= \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)h_t^2$$

avec les contraintes assurant la positivité de la variance conditionnelle (cette fois-ci peuvent être non nécessaires)

$$\alpha_0 > 0 \;\; ; \;\; \alpha_i \geq 0; \;\; \beta_j \geq 0; \;\; \forall i \; ; \; \forall j$$

19

Modèles de type GARCH (Remarques)

- Si $q=0$ on a un GARCH(p,q)=GARCH(p,0)=ARCH(p)
- Un processus de type GARCH(p,q) est équivalent à un processus de type ARCH(∞) ce que l'on peut démontrer par récurrence (en remplaçant h_t^2 par h_{t-1}^2 etc.). Cette équivalence permet de déterminer les conditions de stationnarité d'un processus de type GARCH: $\alpha(1)+\beta(1)<1$.
- Les processus GARCH sont similaires aux processus ARMA usuels dans le sens où le degré q apparaît comme le degré de la partie de la moyenne mobile et p comme celui de l'autorégressive; cela permet d'introduire des effets d'innovation. La variance conditionnelle est déterminée par le carré des p erreurs précédentes et des q variances conditionnelles passées.

20

Test d'un modèle de type GARCH

- Dans le cas d'une hétéroscédasticité conditionnelle supposée, on ne peut tester une spécification de type ARCH que contre une spécification de type GARCH.
- Le test porte sur l'hypothèse nulle H_0 d'une erreur ARCH(p) contre l'hypothèse H_1 d'une erreur GARCH(p,q). On va donc tester l'hypothèse H_0 que les β_j sont nuls.
- H_0: $\beta_j=0, j=1,\ldots,q;$
  contre l'hypothèse H_1: il existe au moins un β_j non nul.

Test d'un modèle de type GARCH

- Le test le plus approprié est celui du multiplicateur de Lagrange: nR^2 ~>$\chi^2(q)$ (q=degré de liberté) où R^2 est le coefficient de détermination obtenu dans la régression par les MCO dans l'équation $h_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \hat{\beta}_j h_{t-j}^2$
- Si $nR^2 > \chi^2(q)$ lu dans la table à un seuil de confiance (en général 0,05) et q degrés de liberté alors on rejette l'hypothèse H_0. Les erreurs obéissent à un processus GARCH(p,q).

Estimation d'un modèle de type GARCH

- La procédure d'identification des ordres p et q du GARCH est la même que pour l'identification des ordres d'un processus ARMA.
- L'estimation des paramètres du modèle peut se faire à l'aide de l'algorithme de Berndt, Hall ou bien celui de Hall et Hausman (1974) fondé sur une méthode de maximum de vraisemblance.

Rappel:

Espérance conditionnelle:

Cas discret: $E(X/Y) = \sum_x x.p(x/y)$

Cas continue: $E(X/Y) = \int x.f(x/y)dx$

Si X et Y sont indépendantes: $E(X/Y) = E(X)$

Variance conditionnelle:

$$Var(X/Y) = E\left(X^2/Y\right) - E^2(X/Y)$$