Université Abdelmalek Essaâdi **Année universitaire : 2014-2015**

ENSA de Tétouan **1ère année de cycle ingénieur**

Contrôle Continu N°2

de Probabilités, Statistiques et Calcul Stochastique

(Durée : 2 heures)

Exercice 1 : (6 points)

Une variable aléatoire X est dite de Weibull de paramètres $\alpha>0$ et $\beta>0$, si la variable X^{α} suit une loi exponentielle de paramètre $\beta>0$. Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\beta x^{\alpha}} & si \quad x\geq 0\\ 0 & si \quad x<0\end{cases}$$

1°) Déterminer sa fonction de densité de probabilité f.

2°) Calculer son espérance mathématique et sa variance.

On rappelle que $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$ est la seconde fonction d'Euler.

Exercice 2 : (8 points)

Considérons une population composée de N individus parmi lesquels une proportion p possède un caractère donné. On tire de cette population au hasard et sans remise un échantillon de taille n ($n\leq N$).

1°) Soit X le nombre aléatoire d'individus de cet échantillon possédant le caractère envisagé. Monter que $P(X=k)=\dfrac{C_{pN}^{k}C_{(1-p)N}^{n-k}}{C_N^n};\quad \forall k,\ 0\leq k\leq n.$

Quelle est la loi suivie par X ?

2°) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X)=np$ et sa variance est $Var(X)=\dfrac{N-n}{N-1}np(1-p)$.

3°) Soit $f_n=\dfrac{X}{n}$ la fréquence relative des individus ayant le caractère étudié parmi les n tirés.

Montrer que f_n converge en probabilité vers p.

Exercice 3 : (6 points)

1°) Une v.a. X suivant une loi géométrique de paramètre p, prenant les valeurs k= 0, 1, 2,…, n,…avec les probabilités $P(X=k)=p(1-p)^k$

Montrer, par la méthode directe ou bien à partir de la fonction génératrice des moments, que son espérance mathématique est $E(X)=\dfrac{1-p}{p}$ et sa variance est $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

2°) Il est plus fréquent dans la pratique d'envisager la v.a. $Y=X+1$. Quelles sont les valeurs prises par Y et avec quelles probabilités ? Montrer que l'espérance mathématique de Y est $E(Y)=\dfrac{1}{p}$ et sa variance est $Var(Y)=\dfrac{1-p}{p^2}$

3°) Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires géométriques indépendantes ayant le même paramètre p (probabilité de succès), alors la variable $Z=Y_1+Y_2$ suit une loi binomiale négative donnant la probabilité du nombre d'essais jusqu'à l'obtention de deux succès, notée $NB(2, p)$ de loi de probabilité $P(Z=k)= C_{k-1}^{1}p^2(1-p)^{k-2}$; pour $k\geq 2$.

Bonne chance !