# Chapitre 3: **Modèles non linéaires de la Finance (suite)**



## Plan du chapitre 3 (suite):

- **Modèles ARCH et prévisions**
- **Variantes des processus ARCH:**
  - ARCH-M (AutoRegressive Conditionnal Heteroscedasticity-in Mean)
  - GARCH-M

# Modèles ARCH et prévisions

- La question de la prévision dans le cadre des processus de type ARCH a été abordée par de nombreux auteurs.
- Engle et Kraft (1983) ainsi que Engle et Bollerslev (1986) ont dérivé les expressions de la variance de l'erreur de prévision dans le cas de processus avec erreurs ARCH et GARCH respectivement.
- Bollerslev (1986) ainsi que Granger, White et Kamstra (1989) se sont intéréssés à la construction d'intervalles de confiances pour des prévisions à un pas.
- Dans le domaine des prévisions, on pourra également consulter les travaux de Geweke (1989), Baillie et Bollerslev (1992) ou encore Nelson et Foster (1994, 1995).



# Modèles ARCH et prévisions

- Considérons un processus GARCH(p,q) est défini par: $\varepsilon_t = u_t.h_t$ avec $u_t \sim> N(0,1)$ et

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}^2$$

- On peut écrire à l'horizon $\tau$:

$$h_{t+\tau}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t+\tau-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t+\tau-j}^2$$

# Modèles ARCH et prévisions

- Soit encore:

$$h_{t+\tau}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \varepsilon_{t+\tau-i}^2 + \beta_i h_{t+\tau-i}^2) + \sum_{i=\tau}^{m} (\alpha_i \varepsilon_{t+\tau-i}^2 + \beta_i h_{t+\tau-i}^2)$$

où $n$=min($m$,$\tau$-1) et $m$=max($p$,$q$).

- En notant $I_t$ l'ensemble d'informations disponible à la date $t$, on a:

$$E\left[h_{t+\tau}^2 / I_t\right] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) E\left[h_{t+\tau-i}^2 / I_t\right] + \sum_{i=\tau}^{m} (\alpha_i \varepsilon_{t+\tau-i}^2 + \beta_i h_{t+\tau-i}^2)$$

car $E\left[\varepsilon_{t+\tau}^2 / I_t\right] = E\left[h_{t+\tau}^2 / I_t\right]$ si $\tau$>0.



# Modèles ARCH et prévisions

- A titre d'exemple, considérons un processus GARCH(1,1). On a naturellement $p$=$q$=1, donc $m$=1 et, pour $\tau$≥2, $n$=min(1, $\tau$-1)=1.
- Par conséquent, on en déduit la relation suivante: $E\left[h_{t+\tau}^2 / I_t\right] = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) E\left[h_{t+\tau-1}^2 / I_t\right]$
- En notant $E\left[h_{t+\tau}^2 / I_t\right] = \hat{h}_{t+\tau}^2$ , on a donc la formule récursive pour $\tau$≥2: $\hat{h}_{t+\tau}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{h}_{t+\tau-1}^2$
- Bien évidement, lorsque l'horizon de prévision $\tau$ vaut 1, on a: $\hat{h}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t^2$

# Modèles ARCH et prévisions

- Les prévisions de la volatilité, pour des horizons de prévisions supérieures à un pas, peuvent donc être effectuées selon l'équation
$$\hat{h}^2_{t+\tau} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{h}^2_{t+\tau-1}$$
- et, pour les prévisions statiques (à un pas) selon $\hat{h}^2_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t^2$



# Modèles ARCH et prévisions

- On peut aussi utiliser une relation alternative, valable quel que soit l'horizon:

$$\hat{h}^2_{t+\tau} = \alpha_0 \sum_{i=0}^{r-1} (\alpha_i + \beta_i)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{r-1}\left[\alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t^2\right]$$

- Ainsi, lorsque l'horizon de prévision augmente, la prévision optimale converge de façon monotone vers la variance non conditionnelle $\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$

# Variantes des processus ARCH:

- ARCH-M (AutoRegressive Conditionnal Heteroscedasticity-in Mean).
- GARCH-M
- GARCH-DM (Difference in Mean)
- GARCH-DLM (Distributed Lag in Mean)
- TARCH (Threshold ARCH)
- TGARCH (Threshold GARCH)
- EGARCH (Exponential GARCH)
- QGARCH (Quadratic GARCH)
- etc…



# Processus ARCH-M

- L'étude de certaines variables financières fait en outre apparaître une relation entre la moyenne et la variance analysée.
- Engle, Lilien et Robins (1987) ont proposé un modèle spécifique dans leur analyse sur la structure des taux d'intérêt: il s'agit du modèle ARCH en moyenne, noté ARCH-M (ARCH in Mean).

## Processus ARCH-M

- Les modèles de type ARCH-M sont certainement la catégorie des modèles ARCH la plus pertinente d'un point de vue économique.
- En effet, l'évaluation du risque constitue un point central de l'économie financière.
- Or, comme le notent Engle, Lilien et Robins (1987), les méthodes usuelles de mesure et de prévision du risque sont souvent extrêmement simples et par conséquent inadaptées à l'analyse des séries temporelles financières.



## Processus ARCH-M

- Il est raisonnable de penser que, puisque le degré d'incertitude concernant les rentabilités varie au cours du temps, la compensation que reçoivent les agents - présentant de l'aversion pour le risque- issue de la détention d'actions doit également varier au cours du temps.
- Ainsi, il convient non seulement de mesurer le risque, de tenir compte de sa variation au cours du temps, mais également d'inclure cette information comme un déterminant de la rentabilité du titre ou du portefeuille.
- La modélisation ARCH-M permet de tenir compte de ce phénomène en introduisant la variance conditionnelle dans l'équation de la moyenne.

# Processus ARCH-M

- Un modèle ARCH-M s'écrit en se basant sur un modèle AR(p):

$$\Phi(L)Y_t = \varepsilon_t + \delta h_t^2$$

avec

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

- Dans ce modèle l'espérance conditionnelle est fonction de la variance $h_t^2$, ce qui signifie que le niveau atteint par la variable est fonction de la volatilité (ce qui paraît assez réaliste pour des cours boursiers selon l'hypothèse de l'aversion pour le risque des agents et donc que l'espérance de gain est fonction de la variance).



# Processus ARCH-M

**Remarque:**

- L'estimation convergente d'un modèle ARCH-M nécessite une bonne spécification de $h_t^2$, alors que pour un modèle GARCH($p$,$q$), des estimateurs convergents des paramètres peuvent être obtenus même lorsque la spécification de $h_t^2$ est mauvaise.
- Pagan et Ullah (1988) ont montré que toute erreur de spécification dans l'équation de la variance entraîne des biais et une éventuelle non convergence des estimateurs des paramètres de l'équation de la moyenne.

## Processus GARCH-M

- Un modèle GARCH-M s'écrit (dans le cas où l'équation de la moyenne est un processus ARMA):

$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \delta h_t^2$

ou encore sous forme simplifiée:

$$\Phi(L) Y_t = \theta(L) \varepsilon_t + \delta h_t^2$$

avec
$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}^2$$

où $Y_t$ est un processus stationnaire, $\Phi(L)$ et $\theta(L)$ sont les polynômes de retard autorégressif et moyenne mobile respectivement.



## Processus GARCH-M

- Une variation de la variance conditionnelle sera donc accompagnée d'une variation de la moyenne conditionnelle de $Y_t$.
- Cocco et Paruolo (1990) définissent un modèle dans lequel c'est l'accroissement de la volatilité (et non la volatilité elle-même) qui va influencer le niveau atteint par la variable à expliquer.

# Bibliographie:


- Régis BOURBONNAIS, Michel TERRAZA: «Analyse des séries temporelles: Applications à l'économie et à la gestion», DUNOD, 2004.
- Sandrine LARDIC, Valérie MIGNON: «Économétrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières», Economica, 2002.