Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire : 2014/2015
LP Informatique de Gestion
Méthodes Quantitatives de gestion

Contrôle final de Recherche Opérationnelle

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 :

Une usine fabrique des bicyclettes et des scooters ; chaque produit passe à travers deux centres de machines. Le premier centre dispose d'un maximum de 120 heures et le second d'un maximum de 180 heures. La construction d'une bicyclette nécessite 6 heures dans le premier centre et 3 heures dans le second ; la construction d'un scooter nécessite 4 heures dans le premier centre et 10 heures dans le second.

Si le profit par bicyclette est 45 DH et celui d'un scooter 55 DH, le problème est de déterminer le nombre de bicyclettes et de scooters qu'il faudrait construire pour maximiser le profit.

1. Donner le modèle mathématique de ce problème de production.
2. Résoudre le problème par la méthode graphique. Justifier l'utilisation de cette méthode.
3. Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre ce problème. Conclure.
4. Laquelle des contraintes est saturée par la solution trouvée et pourquoi ?

EXERCICE 2 :

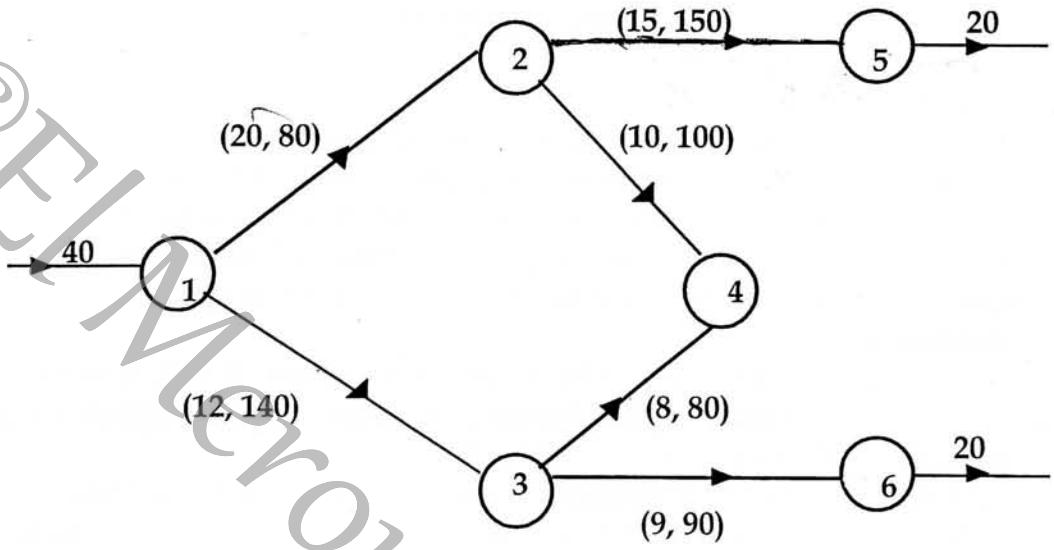
On considère un projet composé de 10 tâches dont les durées (en semaines) et les contraintes d'antériorité sont données par le tableau suivant:

Tâches	Durée (en semaines)	Tâches antérieures
A	4	----
B	5	----
C	4	A
D	2	A et B
E	4	C et D
F	2	C et D
G	6	E et F
H	8	F
I	4	C et D
J	5	F et I

1. Construire le diagramme de GANTT de ce projet.
2. Quelle est la durée totale de ce projet ?
3. Calculer les dates de début et de fin au plus tôt et au plus tard de toutes les tâches de ce projet ?
4. Calculer les marges totales des tâches de ce projet.
5. Quel est l'intervalle de placement de chaque tâche de ce projet ?

EXERCICE 3 :

1. Donner le modèle linéaire du problème de flot minimum décrit par le graphe suivant, où les valeurs sur chaque arc représentent respectivement la capacité et le coût unitaire (en DH) de cet arc :



2. Quel algorithme peut-on appliquer, par la suite, pour résoudre ce problème ?

Bonne chance !

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan

Année Universitaire 2014/2015

Corrigés du contrôle final de Recherche Opérationnelle

Exercice 1 :

1°) **Activités** — **Amplitudes**

nbre de bicyclettes à construire $\longrightarrow x$

" " scooters " " $\longrightarrow y$

Fonction objective :

Maximiser $Z = 45x + 55y$

Contraintes :

$$6x + 4y \leq 120$$
$$3x + 10y \leq 180$$
$$x, y \geqslant 0 \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

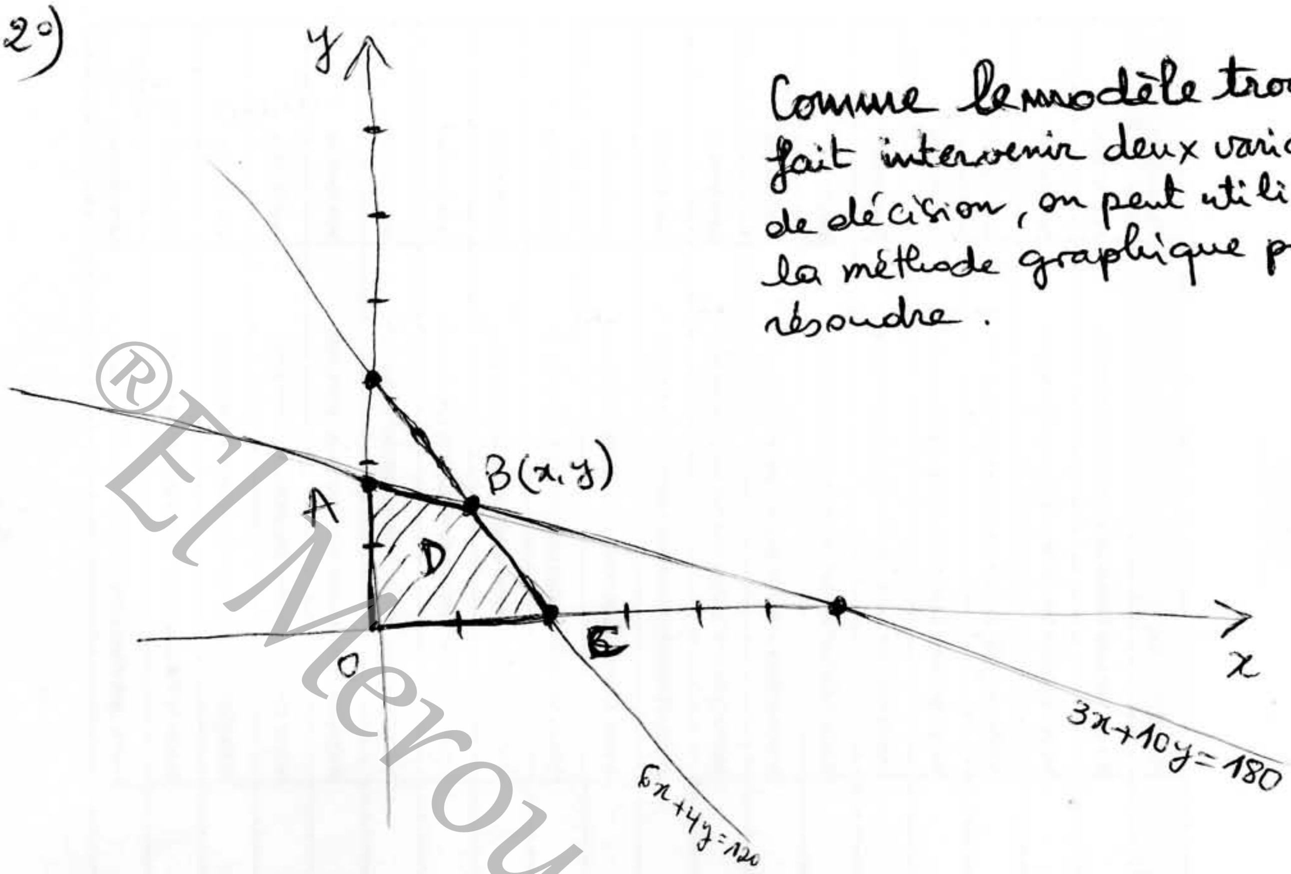
D'où, le modèle cherché est :

$$\text{Max } Z = 45x + 55y$$

$$\text{s.à} \begin{cases} 6x + 4y \leq 120 \\ 3x + 10y \leq 180 \\ x, y \geqslant 0 \end{cases}$$

2°)

Comme le modèle trouvé fait intervenir deux variables de décision, on peut utiliser la méthode graphique pour le résoudre.



$6x+4y=120$	$3x+10y=180$
$x=0 \Rightarrow y=30$	$x=0 \Rightarrow y=18$
$y=0 \Rightarrow x=20$	$y=0 \Rightarrow x=60$

* $O(0,0) \Rightarrow Z_O = 0$
* $A(0,18) \Rightarrow Z_A = 45\times 0 + 55\times 18 = 990$
* $C(20,0) \Rightarrow Z_C = 45\times 20 + 55\times 0 = 900$

* $B(x,y)$? $\begin{cases} 3x+10y=180 & \times 2 \Rightarrow 6x+20y=360 \quad ① \\ 6x+4y=120 \quad ② \end{cases}$

$① - ② \Rightarrow 16y = 240 \Rightarrow \boxed{y=15}$

$② \Rightarrow x = \frac{120-4y}{6} = \frac{120-60}{6} = \frac{60}{6} = 10$

donc $B(10,15)$

d'où $Z_B = 45\times 10 + 55\times 15 = 450 + 825 = 1275$

Conclusion :

Une solution optimale (maximale) est (10, 15)

La valeur maximale est $Z = 1275$

3°) Résolution par l'algorithme du simplexe :

D'abord, on donne la forme standard du problème :

$$\text{Min } Z = -45x - 55y$$

$$\text{S.à} \begin{cases} 6x + 4y + u = 120 \\ 3x + 10y + p = 180 \\ x, y, u, p \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau initial du simplexe est :

V.b	x	y v.e	u	p	$-Z$	T.d.
u	6	4	1	0	0	120
v.p p	3	$\boxed{10}$ pivot	0	1	0	180
$-Z$	-45	-55 ↑	0	0	1	0

Le 2ème tableau du simplexe est :

V.b.	x v.e	y	u	p	$-Z$	T.d.
v.p u	$\boxed{4{,}8} = \frac{24}{5}$ pivot	0	1	$-0{,}4 = \frac{-4}{10}$	0	48
y	$0{,}3 = \frac{3}{10}$	1	0	$0{,}1$	0	18
$-Z$	$-28{,}5 = -\frac{57}{2}$ ↑	0	0	$5{,}5 = \frac{11}{2}$	1	990

le 3^{eme} tableau du simplexe est :

V.b.	x	y	u	p	$-Z$	T.d.
x	1	0	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{12}$	0	10
y	0	1	$\frac{-3}{48} = \frac{-1}{16}$	$\frac{1}{8}$	0	15
$-Z$	0	0	$\frac{95}{16} = \frac{285}{48}$	$\cancel{\frac{1263}{24} = \frac{421}{8}}$ $\neq$ 75/24	1	1275

La dernière ligne contient que des valeurs positifs ou nuls donc on est à l'optimum.

Une solution de ce problème est $(10, 15)$

la valeur optimale est $Z = 1275$

<u>Conclusion :</u>

Par la méthode du simplexe et par la méthode graphique on a trouvé la même solution.

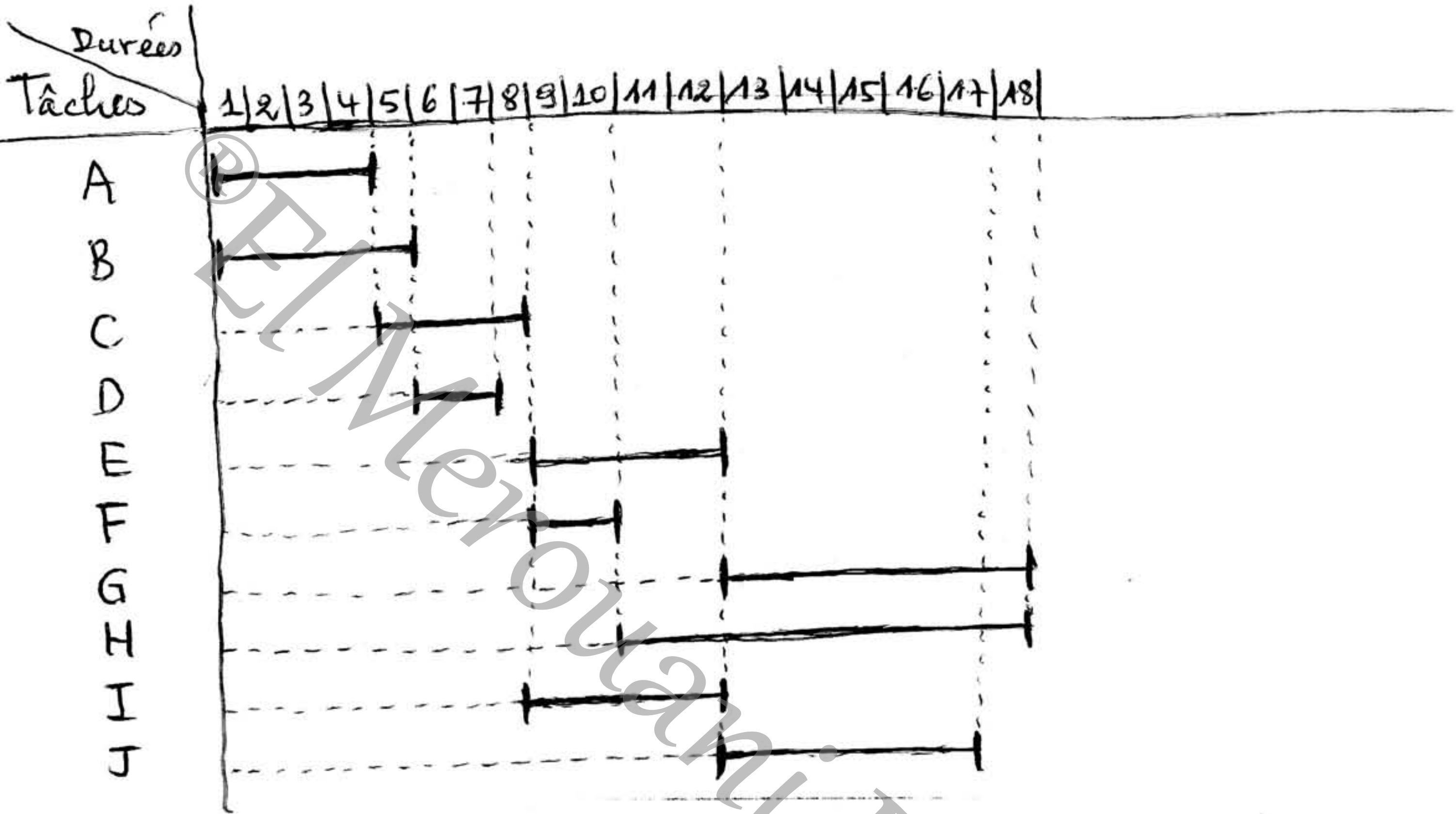
4°) les deux variables d'écarts qu'on a utilisées se sont résolues nulles à l'optimum. Donc les deux contraintes du problème sont "saturées" par la solution trouvée.

<u>Exercice 2 :</u>

(voir page suivante)

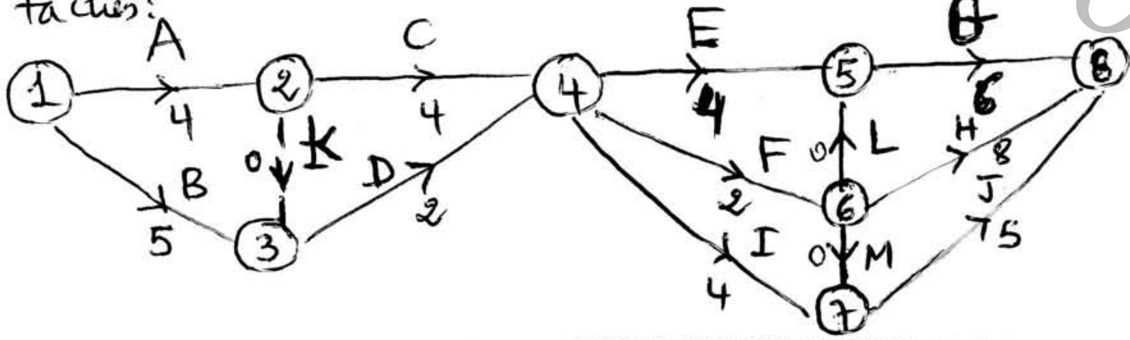
Exercice 2 :

1°) Diagramme de GANTT de ce projet :



2°) D'après le diagramme de GANTT ci-dessus, la durée totale de ce projet est 18 semaines.

3°) On représente le graphe PERT pour s'~~aider~~ à calculer les dates de début et de fin au plus tôt et au plus tard des tâches :



le calcul ~~est~~ donné dans le tableau suivant :

Tâches	DTO	FTO	DTA	FTA	MT	IP
A	0	4	0	4	0	(0,4)
B	0	5	1	6	1	(0,6)
C	4	8	4	8	0	(4,8)
D	5	7	6	8	1	(5,8)
E	8	12	$\boxed{8}$	12	0	(8,12)
F	8	10	$\boxed{8}$	10	0	(8,10)
G	12	18	12	18	0	(12,18)
H	10	18	10	18	0	(10,18)
I	8	12	9	13	1	(8,13)
J	12	17	13	18	1	(12,18)

4°) La marge totale d'une tâche (MT) est donnée par

$$MT = DTA - DTO = FTA - FTO$$

(voir tableau précédent)

5°) L'intervalle de placement d'une tâche est donné par :

borne inf = DTO de la tâche
borne sup = FTA de la tâche
(voir tableau ci-dessus)

L'intervalle de placement indique la durée maximale de réalisation de la tâche et simultanément la période pendant laquelle cette activité doit être entièrement effectuée.

Exercice 3 :

1°) Modèle linéaire de ce problème de flot min.

Activités		Amplitudes
Nombre d'unités qui passe par l'arc (i,j)	$\longrightarrow$	x_{ij}

Fonction économique :

Minimiser $Z = 80x_{12} + 140x_{13} + 100x_{24} + 150x_{25} +$
$+ 80x_{34} + 90x_{36}$

Contraintes :

Contraintes de conservation de flot :

$x_{12} + x_{13} = 40$

$x_{24} + x_{25} - x_{12} = 0$

$x_{34} + x_{36} - x_{13} = 0$

$x_{24} + x_{34} = 0$

$x_{25} = 20$

$x_{36} = 20$

Contraintes de capacités :

$x_{12} \leq 20$; $x_{13} \leq 12$; $x_{24} \leq 10$; $x_{25} \leq 15$

$x_{34} \leq 8$; $x_{36} \leq 9$

Contraintes de non-négativités : $x_{ij} \geq 0$; $\forall i, j$

D'où le modèle linéaire cherché est :

Min $Z = 80x_{12} + 140x_{13} + 100x_{24} + 150x_{25} + 80x_{34} + 90x_{36}$

Sujet à
$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} = 40 \\ x_{24} + x_{25} - x_{12} = 0 \\ x_{34} + x_{36} - x_{13} = 0 \\ x_{24} + x_{34} = 0 \\ x_{25} = 20 \\ x_{36} = 20 \\ 0 \leq x_{12} \leq 20 \ ; \ 0 \leq x_{25} \leq 15 \\ 0 \leq x_{13} \leq 12 \ ; \ 0 \leq x_{34} \leq 8 \\ 0 \leq x_{24} \leq 10 \ ; \ 0 \leq x_{36} \leq 9 \end{cases}$$

2°) On peut appliquer le simplexe pour le résoudre