Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan

Programmation linéaire en nombres entiers

Prof. M. EL MEROUANI
Département de Statistique et Informatique
Appliquées à la Gestion

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif

- Soit le problème linéaire en nombres entiers (P^0) suivant:

$$(P^0)\begin{cases} \text{Min } Z=4x_1-6x_2 \\ \text{s.à.} \quad \boxed{\begin{array}{l} -x_1+x_2\leq 1 \\ x_1+3x_2\leq 9 \\ 3x_1+x_2\leq 15 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{array}} \quad F \\ x_1,x_2 \text{ entiers} \end{cases}$$

- Son problème relaxé (P^0_R) est:

$$(P^0_R)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \quad x\in F \end{cases}$$

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif

Initialisation:

- On résout (P^0_R) par la méthode graphique (ou le simplexe): $x^*=(1,5\ ;\ 2,5)$ et $Z_R^*=-9$
- Cette solution étant non entière, donc non réalisable pour (P^0). Mais, nous pouvons en déduire une borne inférieure de Z^* de (P^0).
- En effet, (P^0_R) étant une relaxation de (P^0), donc $Z_R^*=-9\leq Z^*$.
- Posons $Zs=+\infty$

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif

Séparation : Cette étape consiste à séparer le domaine réalisable de (P^0) en deux sous-ensembles dont aucun ne devra contenir la solution optimale de (P^0_R).

- Cette séparation va se faire par rapport à l'une des variables, dite variable de séparation, qui ne respecte pas la contrainte d'intégrité qui lui est associée dans le problème (P^0).

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif (Séparation)

- Nous choisissons de séparer sur la variable x_1

$x_1 \leq [x_1^*]$ ou $x_1 \geq [x_1^*]+1$

c'est-à-dire $x_1 \leq 1$ ou $x_1 \geq 2$

ce qui définit deux problèmes candidats que nous plaçons dans la liste:

$$(P^1)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à. } x \in F \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \text{ entiers} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (P^2)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à. } x \in F \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \text{ entiers} \end{cases}$$

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif

Supposons avoir choisi le problème candidat (P^1)

Évaluation: en relaxant les contraintes d'intégrité du problème (P^1), nous obtenons le problème candidat relaxé et sa solution optimale:

$$(P^1_R)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à. } x \in F \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$$

de solution optimale $x_1^*=1$; $x_2^*=2$

$Z_R^*=-8$

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif (Évaluation)

- La solution optimale de ce sous-programme étant entière, elle est donc aussi optimale de (P^1).
- Cette solution constitue donc une solution réalisable pour le problème (P^0) et la valeur -8 constitue une borne supérieure de la valeur optimale de (P^0): Zs=-8.
- Cette solution est donc candidate à être une solution optimale de (P^0). Cela dépendra des résultats de la résolution du 2ème problème candidat (P^2).

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif (Évaluation)

$$(P^2_R)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \\ x \in F \\ x_1 \geq 2 \end{cases}$$

de solution optimale

$x_1^*=2$

$X_2^*=7/3=2.33$

$Z^*_R=-6$

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif

Stérilisation: La solution optimale de (P^2_R) est non entière, donc non réalisable pour le problème (P^0).

- Normalement, nous devons continuer notre recherche de nouvelles solutions possibles en séparant sur la composante non entière x_2=2.33 de cette solution

$x_2 \leq [2.33]=2$ ou $x_2 \geq [2.33]+1=3$

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif

- Nous obtenons les deux problèmes candidats:

$$(P^3)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \quad x \in F \\ \quad x_2 \leq 2 \\ \quad x_1, x_2 \text{ entiers} \end{cases} \qquad (P^4)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \quad x \in F \\ \quad x_2 \geq 3 \\ \quad x_1, x_2 \text{ entiers} \end{cases}$$

- En relaxant les contraintes d'intégrité, nous obtenons les deux problèmes candidats relaxés associés:

$$(P^3_R)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \quad x \in F \\ \quad x_2 \leq 2 \end{cases} \qquad (P^4_R)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \quad x \in F \\ \quad x_2 \geq 3 \end{cases}$$

$x_1^*=1$, $x_2^*=2$
$Z_R^*=-8$

Non-réalisable

Méthode du Branch & Bound: Exemple illustratif

- La solution optimale du premier problème est entière et donc aussi une solution optimale du problème (P^0) puisque le deuxième sous-programme n'est pas réalisable.

Algorithme du Branch & Bound

- Reprenons le problème linéaire en nombres entiers et le problème linéaire continu correspondant:

$$(PLE)\begin{cases} \text{Min } Z(X) \\ \text{s.à} \\ X \in F \\ X \text{ entier} \end{cases} \qquad (PLC)\begin{cases} \text{Min } Z(X) \\ \text{s.à} \\ X \in F \end{cases}$$

Algorithme du Branch & Bound:

0.Initialisation: • Au départ, la liste contient un seul problème candidat (PLE).

- Résoudre le (PLC) associé.
- Si cette solution est réalisable pour (PLE), alors la procédure s'arrête. Cette solution est optimale pour (PLE).
- Sinon, identifier une borne supérieure Zs de la fonction économique de (PLE).

Algorithme du Branch & Bound:

1.Séparation : • Choisir l'une des composantes non-entières x_j^* de la solution du (PLC). Partitionner le domaine réalisable en deux sous-ensembles en ajoutant l'une des contraintes : $x_j \leq [x_j^*]$ ou $x_j \geq [x_j^*]+1$

- Nous plaçons les deux nouveaux sous-problèmes dans la liste.

Algorithme du Branch & Bound:

2.Choix du (PC): • Si la liste est vide, alors nous arrêtons la procédure:

- Si au moins une solution réalisable de (P) a été rencontrée, alors nous concluons que le point incumbent est une solution optimale de (P).

  Autrement, nous concluons que le problème (P) est non-réalisable.
- Sinon, choisir, selon un critère convenable, un (PC) dans la liste et considérer (PC_R), le problème candidat relaxé des contraintes d'intégrité.

Algorithme du Branch & Bound:

3.Évaluation:

- Déterminer une borne inférieure Zi de la fonction économique du (PC_R).
- La valeur optimale du sous-problème relaxé constitue une borne inférieure de la valeur de la fonction économique de ce sous-problème.

Algorithme du Branch & Bound:

4.Stérilisation:

(a) Si le (PC_R) n'est pas réalisable alors retourner en 2.

(b) Sinon, si Zi≥Zs alors retourner en 2.

(c) Sinon (Zi<Zs), si Zi est atteinte en un point entier réalisable alors ce point est incumbent. Poser Zs=Zi et retourner en 2.

Dans chacun de ces trois cas, on dira que le (PC) est stérilisé.

5.Test: Si tous les sous-problèmes sont stérilisés, on arrête et le point incumbent est optimale pour (PLE).

Sinon retourner 1.

Exemple

- Considérons l'exemple du problème de programmation linéaire en nombres entiers suivant, auquel nous allons appliquer la méthode de Branch & Bound:

$$(PLE)\begin{cases} \text{Min } Z=3x_1-7x_2-12x_3 \\ \text{s.à.} \quad \left.\begin{array}{l} -3x_1+6x_2+8x_3\leq 12 \\ 6x_1-3x_2+7x_3\leq 8 \\ -6x_1+3x_2+3x_3\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3\geq 0 \end{array}\right\} F \\ \quad x_1, x_2, x_3 \text{ entiers} \end{cases}$$

- Considérons le problème linéaire continu (PLC) associé à (PLE):

$$(PLC)\begin{cases} \text{Min } Z \\ \text{s.à.} \quad (x_1, x_2, x_3) \in F \end{cases}$$

- Lors de la résolution de (PLE) en appliquant la méthode de B. & B., on aura à résoudre différents sous-problèmes linéaires continus.
- Pour résumer les calculs intermédiaires, il est pratique de représenter la résolution d'un sous-problème par un nœud où n'apparaissent que les valeurs de Z et des variables non nulles.

Par exemple, la solution de (PLC) peut être représentée par:

$$\boxed{\begin{array}{l} X=(0;\ 10/33\ ;14/11)^t \\ Z=-574/33 \end{array}}$$

Afin de simplifier la notation, on remplace l'écriture fractionnelle par l'écriture décimale. Ce nœud peut alors avoir la forme suivante:

$$\boxed{\begin{array}{l} X=(0;\ 0.3;\ 1.3)^t \\ Z=-17.4 \end{array}}$$

Une arborescence, qualifiée aussi d'arbre d'énumération, sera alors définie où le premier nœud, dit le nœud père, est constitué du problème relaxé (PLC).

Chaque arc de l'arborescence représente un problème défini par le problème précédent augmenté de la contrainte associé à l'arc. Par contre, la solution optimale et la valeur optimale d'un problème seront représentées par le nœud qui termine cet arc.

<u>Initialisation:</u> La solution optimale de (PLC), $x=(0;\ 10/33;\ 14/11)^t$ est non réalisable.

La solution x=0 est une solution réalisable de (PLE), donc $Zs=Z_0=0$ constitue une borne supérieure de la fonction économique. Ainsi la solution x=0 est un point incumbent.

<u>1ère itération:</u>

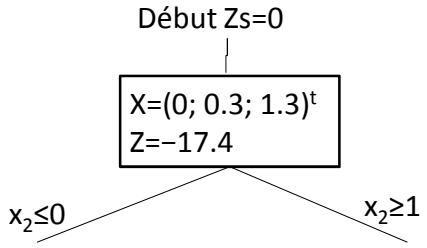
<u>1. Séparation:</u> en branchant sur la composante x_2 et en ajoutant l'une des deux contraintes: $x_2 \leq 0$ ou $x_2 \geq 1$, on a

21

les deux sous-problèmes ayant la même fonction objectif que (PLC):

$$(P^1)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \quad x \in F \\ \quad x_2 \leq 0 \\ \quad x \text{ entier} \end{cases} \qquad (P^2)\begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} \quad x \in F \\ \quad x_2 \geq 1 \\ \quad x \text{ entier} \end{cases}$$

La liste contient donc deux sous-problèmes (P^1) et (P^2) .



22

2. Tests et choix du (PC): la liste n'étant pas vide, nous choisissons comme (PC), le sous-problème (P^1) et nous considérons le problème candidat relaxé des contraintes d'intégrité:

$$(PCR)\begin{cases} & \text{Min } Z(x) \\ \text{s.à.} & x \in F \\ & x_2 \leq 0 \end{cases}$$

3. Évaluation: (PC_R) admet comme solution:

$$\boxed{\begin{array}{l} x=(0;\ 0;\ 8/7)^t \\ Zi=-96/7 \end{array}}$$

Une borne inférieure du (PC) est donnée par la valeur optimale Zi de (PC_R).

23

4. Stérilisation: aucun des trois critères de stérilisation ne peut être appliqué pour stériliser ce sous-problème. En effet,

(a) $F(PCR) \neq \emptyset$

(b) $Zi < Zs$

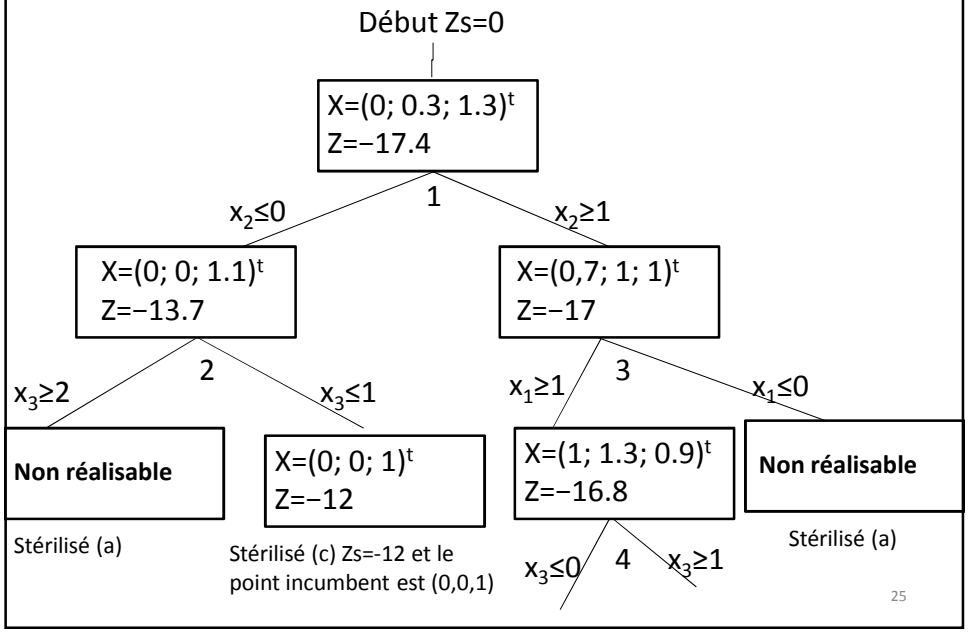
(c) La solution optimale de (PCR) n'est pas entière donc n'est pas réalisable.

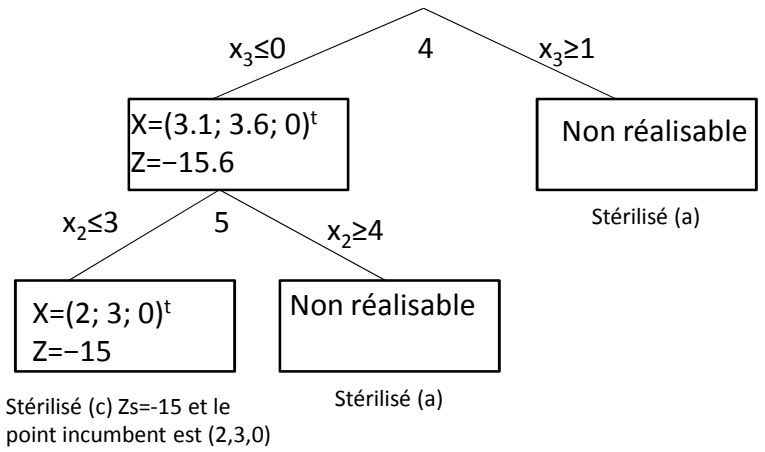
5. Retourner en 1. car le sous-problème demeure non stérilisé.

- Fin de la première itération

Prof. Mohamed El Merouani 24

- Présentation de l'arborescence de B. & B.:



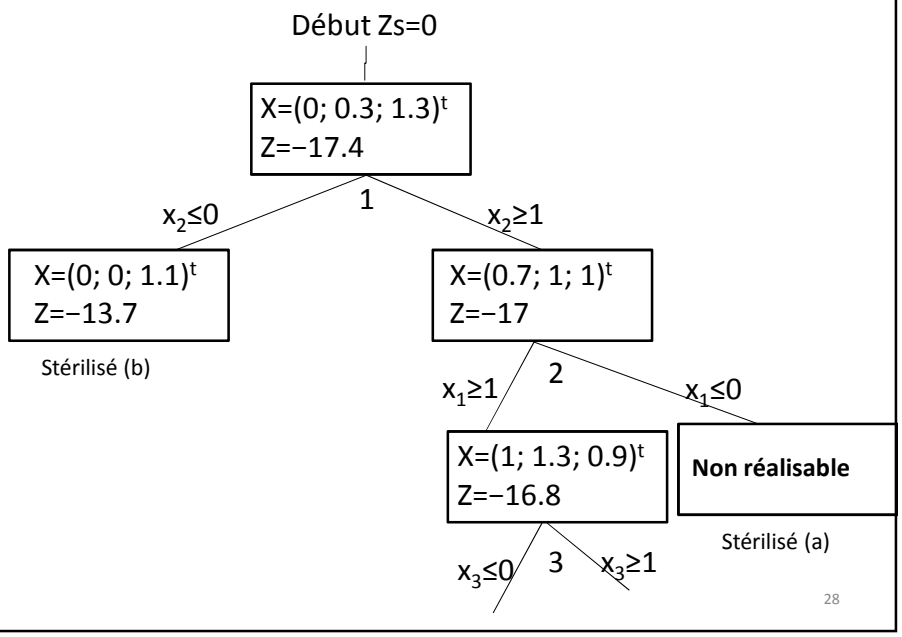


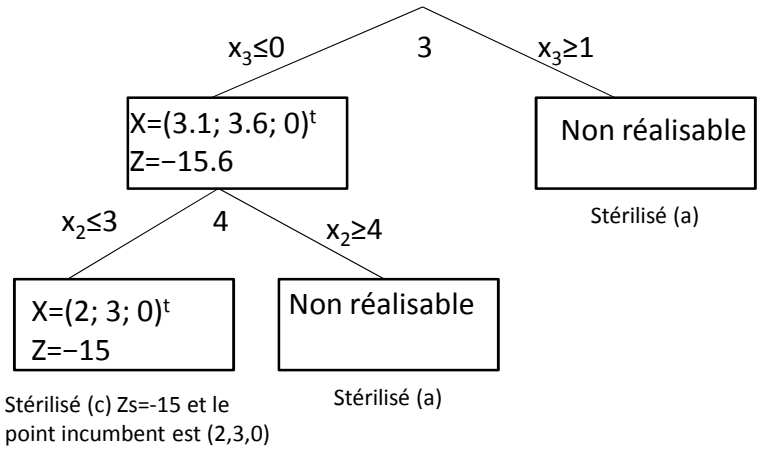
Tous les sous-ensembles sont stérilisés, donc le dernier point « incumbent » est une solution optimale de (PLE)

Remarque:

- La stratégie utilisée est FIFO ou la stratégie d'exploration en largeur d'abord (Breadth-first).
- Au lieu de cette stratégie, nous aurons pu choisir la stratégie d'exploration en profondeur d'abord, connue aussi sous le nom de « Depth-firt » ou encore « LIFO ».

Arborescence de B. & B. en utilisant la stratégie LIFO (Depth-First):





Tous les sous-ensembles sont stérilisés, donc le dernier point « incumbent » est une solution optimale de (PLE)

Remarque:

- Nous constatons, qu'avec la stratégie LIFO, la solution optimale est obtenue en résolvant moins de problèmes candidats qu'avec la stratégie FIFO.
- Ceci n'est toutefois pas toujours le cas. Quand même, la stratégie FIFO est peu utilisée en pratique.

Le calcul d'une solution optimale d'un PC intermédiaire:

- Lors de l'application de la méthode de B. &B., la recherche de la solution optimale du premier problème se fait par l'algorithme du Simplexe.
- Après une séparation selon une variable x, on ajoute aux contraintes du (PC) une contrainte de la forme $x \leq [x^*]$ sur un arc de l'arborescence et une contrainte de la forme $x \geq [x^*]+1$ sur l'autre.
- Donc, les modèles linéaires continus associés aux deux nœuds de branchement diffèrent chacun de précédent par une seule contrainte.

Le calcul d'une solution optimale d'un PC intermédiaire:

- S'il fallait reprendre toutes les itérations du Simplexe pour trouver une solution optimale des sous-problèmes, l'évolution de la méthode B. & B. dans la suite des séparations à effectuer serait fort ralentie.
- Heureusement, il est possible d'utiliser le calcul post-optimale pour retrouver un nouveau optimum des sous-problèmes.

Bibliographie:

- Y. Benadada & A. El Hilali Alaoui :«*Programmation Mathématique, de la modélisation à la résolution*», Edition Kawtar Print, Rabat, 2012.
- Y. Nobert, R. Ouellet & R. Parent: *«La recherche opérationnelle»*, Edition Gaëtan Morin, 2ème édition, 1999.

Exercice 1

Considérons le programme (vu dans le cours):

$$\text{s.à.}\quad \begin{cases} \text{Min } Z=3x_1-7x_2-12x_3 \\ -3x_1+6x_2+8x_3\leq 12 \\ 6x_1-3x_2+7x_3\leq 8 \\ -6x_1+3x_2+3x_3\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3\geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ entiers} \end{cases}$$

En utilisant la stratégie « en largeur d'abord » (Breadth-first) résoudre le problème:

a) En branchant sur x_1 au lieu de x_2 à l'itération 5.

b) En branchant sur x_2 au lieu de x_3 à l'itération 4.

c) En branchant sur x_3 au lieu de x_2 à l'itération 1.

Exercice 2

Utiliser la méthode de Branch & Bound pour résoudre les problèmes suivants:

a) Min $Z(x) = -x_1 - 2x_2$

s.à. $-x_1+x_2 \leq 10$

$15x_1+16x_2 \leq 240$

x_1 et x_2 non négatives et entières

b) Min $Z(x) = -3x_1 - 3x_2+13x_3$

s.à. $-3x_1+6x_2+7x_3 \leq 8$

$6x_1-3x_2+7x_3 \leq 8$

$x_j \geq 0$ et entières, j=1,2,3.

c) Min $Z(x) = -3x_1 - 5x_2 - 7x_3$

s.à. $-3x_1+6x_2+7x_3 \leq 8$

$6x_1-3x_2+7x_3 \leq 8$

$x_j \geq 0$ et entières, j=1,2,3.

Exercice 3

En appliquant la méthode de B. & B., est ce qu'il peut arriver qu'après un branchement, les deux sous-problèmes soient non-réalisables? Si oui donner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi.