Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire 2013/2014
LEF Sciences Éco. & Gestion
Semestre : Sixième (S6)
Parcours : Economie et Gestion

Contrôle de Recherche Opérationnelle
(Durée : 1 heure 30 min)

Exercice 1 :

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 550 m^3 d'eau. Un hectare de tomates demande 2 heure de main d'œuvre, 4 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 1000 DH. Un hectare de piments demande 5 heures de main d'œuvre, 3 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 2000 DH.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus 100 hectares de tomates.

L'agriculteur veut savoir quelle est la meilleure allocation de ~~ses ressources.~~ de surface irrigable pour les deux cultures. cultivable

Donner le modèle linéaire de ce problème sans le résoudre.

Exercice 2 :

Résoudre le problème linéaire suivant par la méthode graphique :

$$\text{Max } 4x+3y$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} 3x+y\leq 6 \\ -2x+y\leq 4 \\ x-2y\leq 1 \\ x, y\geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Appliquez l'algorithme du Simplexe pour résoudre le problème linéaire suivant :

$$\text{Max } x_1+x_2$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1+2x_2\leq 3 \\ 2x_1+x_2\geq 4 \\ x_1, x_2\geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4 :

1) Résoudre le problème linéaire suivant :

$$\text{Min } x_1+x_2$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1+2x_2\leq 3 \\ x_1+x_2\geq 2 \\ x_1, x_2\geq 0 \end{cases}$$

2) Appliquer l'analyse de sensibilité pour étudier l'ajout de cette nouvelle contrainte $2x_1-x_2\leq 3$ au problème.

Bonne chance !

Corrigés du contrôle de Recherche Opérationnelle 2013/2014 S_6 Eco & gest.

Exercice 1 :

Activités	Amplitudes
surface allouée (en hectare) aux tomates	$\longrightarrow x$
surface allouée (en hectare) aux piments	$\longrightarrow y$

Fonction économique :

Maximiser $Z = 1000x + 2000y$

Contraintes :

$x + y \leq 150$ (totale surface irrégable)

$2x + 5y \leq 480$ (heures de main d'œuvre)

$4x + 3y \leq 550$ (m^3 d'eau)

$x \leq 100$

$x, y \geq 0$

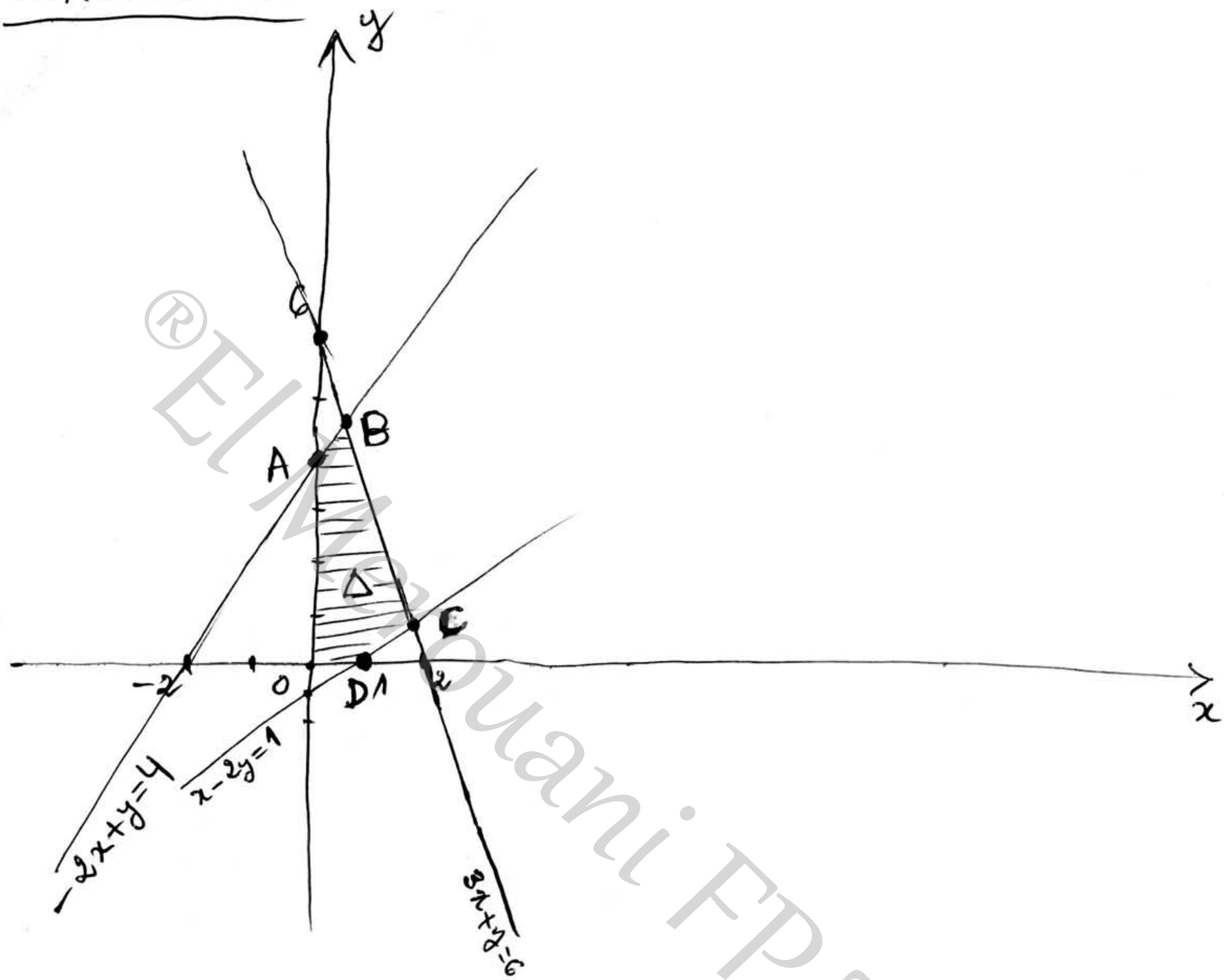
D'où le modèle :

$$\text{Max } Z = 1000x + 2000y$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x + y \leq 150 \\ 2x + 5y \leq 480 \\ 4x + 3y \leq 550 \\ x \leq 100 \end{cases}$$

$$x, y \geq 0$$

Exercice 2 :



$$\begin{cases} 3x+y=6 \\ x=0 \Rightarrow y=6 \\ y=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+y=4 \\ x=0 \Rightarrow y=4 \\ y=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \\ y=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = 4x + 3y \; ?$$

$* \boxed{Z_0 = 0}$

$* \boxed{Z_A = 4 \times 0 + 3 \times 4 = 12}$

$* \; Z_B \qquad B(x, y)?$

$$\begin{cases} -2x + y = 4 & (1) \\ 3x + y = 6 & (2) \end{cases}$$

$(2) - (1) \Rightarrow 5x = 2$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}}$

$(2) \Rightarrow \boxed{y = 6 - 3 \times \frac{2}{5} = 6 - \frac{6}{5} = \frac{24}{5}}$

Donc $\quad B\left(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}\right) \equiv B(0{,}4 \; ; \; 4{,}8)$

D'où $\quad \boxed{Z_B = 4 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{24}{5} = \frac{8}{5} + \frac{72}{5} = \frac{80}{5}} = 16$

$* \; Z_C \qquad C(x, y)?$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \Rightarrow x = 1 + 2y \\ 3x + y = 6 & (2) \Rightarrow 3(1 + 2y) + y = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3 + 7y = 6 \quad \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{7}} \simeq 0{,}43$

$\Rightarrow x = 1 + 2 \times \frac{3}{7} = 1 + \frac{6}{7} = \frac{13}{7} \simeq 1{,}86$

$C\left(\frac{13}{7}, \frac{3}{7}\right) \equiv C(1{,}86 \; ; \; 0{,}43)$

$\boxed{Z_C = 4 \times \frac{13}{7} + 3 \times \frac{3}{7} = \frac{52 + 9}{7} = \frac{61}{7}} = 8{,}71$

3

$* \; Z_D = 4 \times 1 + 3 \times 0 = \underline{\underline{4}}$

Conclusion :

le maximum est atteint en $B\left(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}\right)$

et la valeur maximale est $Z = 16$

Exercice 3 :

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.à} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ x_1 ; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$\text{Min } Z = -x_1 - x_2$$

$$\text{s.à} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Tableau initial

V.b.	x_1	x_2 (V.e)	x_3	x_4	$-Z$	T.D.
V.P. x_3	1	$\boxed{2}$ pivot	1	0	0	3
x_4	2	1	0	-1	0	4
$-Z$	-1	-1	0	0	1	0

V.b.	x_1 (V.e.)	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.D.
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
V.s. x_4	$\boxed{\frac{3}{2}}$ pivot	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{5}{2}$
$-Z$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4 (V.e.)	$-Z$	T.D.
V.s. x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$ pivot	0	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
$-Z$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{7}{3}$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.D.
x_4	0	3	2	1	0	2
x_1	1	2	1	0	0	3
$-Z$	0	1	1	0	1	3

On est à l'optimum, sol^{n} optimale est $x_1 = 3$; $x_4 = 2$
$x_2 = x_3 = 0$ (V.H.b.) valeur optimale $Z = 3$

Autre chemin :

Tableau initial :

V.b.	x_1 (v.e)	x_2	x_3	x_4	$-z$	T.d.
x_3	1	2	1	0	0	3
V.P x_4	$\boxed{2}$ pivot	1	0	-1	0	4
$-z$	-1	-1	0	0	1	0

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4 (v.e)	$-z$	T.d.
V.P x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$ pivot	0	1
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$-z$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	T.d.
x_4	0	3	2	1	0	2
x_1	1	2	1	0	0	3
$-z$	0	1	1	0	1	3

même tableau optimal que le 1er chemin $\Rightarrow$ Même solᵘ optimale et même valeur optimale

Exercice 4 :

1°)

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.à} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.à} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Méthode des deux phases :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + t_2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 3 - x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$t_2 = 2 - x_2 - x_1 + x_4$$

$$\Rightarrow \quad M = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 5$$

V.b.	x_1	x_2 (v.e)	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
v.s t_1	1	$\boxed{2}$ pivot	1	0	1	0	0	0	3
t_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	2
$-Z$	1	1	0	0	0	0	1	0	0
$-M$	-2	-3 ↑	-1	1	0	0	0	1	-5

V.b.	x_1 (v.e)	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$3/2$
v.s t_2	$\boxed{\frac{1}{2}}$ pivot	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$1/2$
$-Z$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-3/2$
$-M$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
x_2	0	1	1	1	1	-1	0	0	1
x_1	1	0	-1	-2	-1	2	0	0	1
$-Z$	0	0	0	1	0	-1	1	0	-2
$-M$	0	0	0	0	1	1	0	1	0

$M = 0 \Longrightarrow$ Phase II

Phase II :

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	1	1	0	1
x_1	1	0	-1	-2	0	1
$-Z$	0	0	0	1	1	-2

On est à l'optimum

Méthode duale :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{S.c} \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

V.b.	x_1 v.e	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.	
v.p x_3	$\boxed{-1}$ pivot	-2	-1	0	0	-3	$\leftarrow$
x_4	-1	-1	0	1	0	-2	
$-Z$	1	1	0	0	1	0	

V.b.	x_1	x_2 v.e	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_1	1	2	1	0	0	3
v.p x_4	0	$\boxed{1}$ pivot	1	1	0	1
$-Z$	0	-1 $\uparrow$	-1	0	1	-3

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_1	1	0	-1	-2	0	1
x_2	0	1	1	1	0	1
$-Z$	0	0	0	1	1	-2

Sol^n - $x_1 = 1$; $x_2 = 1$

$x_3 = x_4 = 0$ (V.R.b.)

$Z = 2$

2°) l'ajout d'une nouvelle contrainte :

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 3$$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	1	1	0	0	1
x_1	1	0	-1	-2	0	0	1
x_5	2	-1	0	0	1	0	3
$-Z$	0	0	0	1	0	1	-2

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	T.d.
x_2	0	1	1	1	0	0	1
x_1	1	0	-1	-2	0	0	1
x_5	0	-1	2	4	1	0	1
$-z$	0	0	0	1	0	1	-2

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	T.d.
x_2	0	1	1	1	0	0	1
x_1	1	0	-1	-2	0	0	1
x_5	0	0	3	5	1	0	2
$-z$	0	0	0	1	0	1	-2

et on retrouve, ainsi, l'optimum.