Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2013/2014
LP « Informatique de Gestion »
Module : Méthodes Quantitatives

Session d'Automne (Semestre 5)
Contrôle Final de Recherche Opérationnelle
Durée : 2 heures

Problème n°1 :

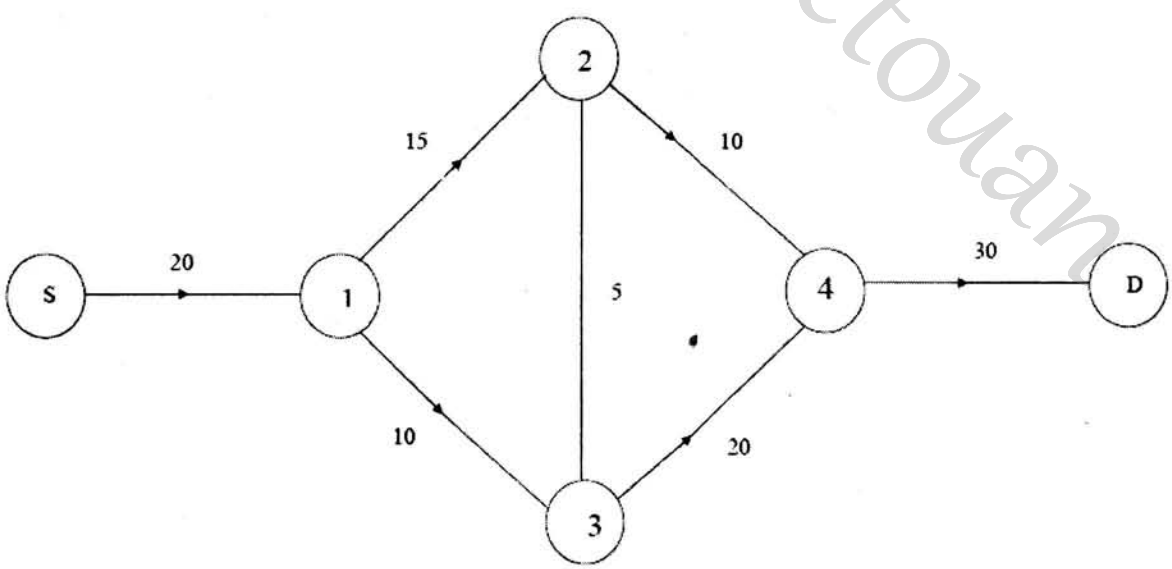
Soit un projet dont les tâches satisfont aux relations de prédécesseurs indiquées au tableau suivant :

Tâches	Prédécesseur(s) immédiat(s)	Durée (en semaines)
A	---	3
B	A	4
C	A	6
D	A	2
E	B	7
F	B,C,D	12
G	B	8
H	E,F	7

1. Construire le diagramme de GANTT et le graphe PERT de ce projet. Quelle est sa durée totale?
2. Quelles sont les tâches simultanées de ce projets ?
3. Calculer les dates de début et de fin au plus tôt et au plus tard, ainsi que les marges totale de toutes les tâches de ce projet, en indiquant l'intervalle de placement de chaque tâche.
4. Quelles sont les tâches qui peuvent être retardées sans compromettre la durée totale de ce projet ? justifier votre réponse !

Problème n°2 :

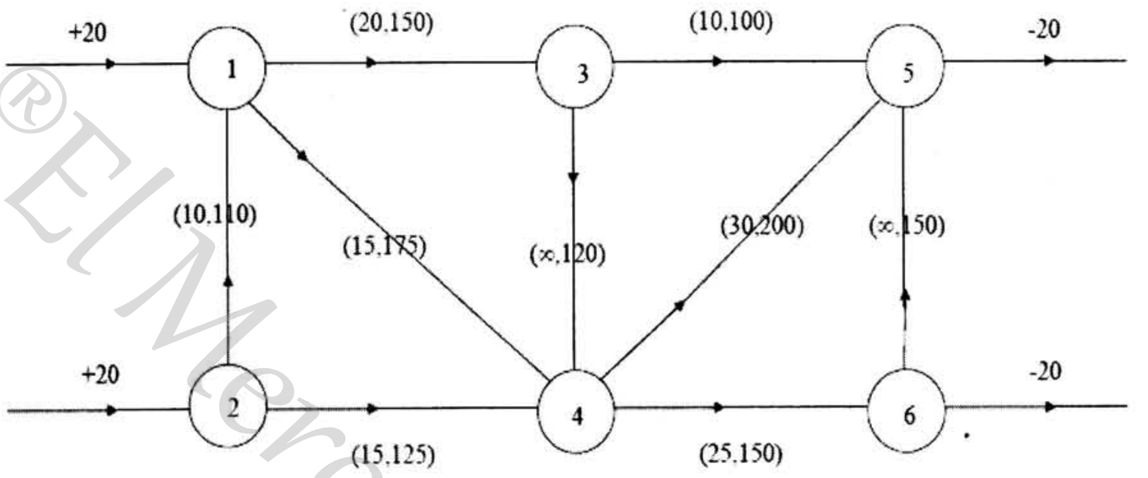
Considérons le réseau orienté suivant, avec S c'est la source et D c'est la destination et les nombres sur les arcs dénotent les capacités de flots :



Trouver le flot maximum en utilisant la méthode des étiquettes sachant que l'arc (2,3) est non orienté.

Problème n°3 :

1. Donner le modèle linéaire du problème de flot minimum décrit par le graphe suivant, où les valeurs sur chaque arc représentent respectivement la capacité et le coût unitaire (en DH) de cet arc :



2. Quel algorithme peut-on appliquer, par la suite, pour résoudre ce problème ?

Problème n°4 :

On considère le problème de transport défini par le tableau suivant :

	C1	C2	C3	Disponibilités
E1	2	6	4	15
E2	4	5	1	35
E3	5	8	3	20
Demandes	15	30	15	

Le problème est de déterminer quelle quantité chaque client Cj (j=1,2,3) doit recevoir de chaque entrepôt Ei (i=1,2,3) pour minimiser le coût total de transport tout en satisfaisant les contraintes.

1. Donner le modèle linéaire de ce problème de transport. Par quelle méthode peut-on le résoudre ?
2. Dresser le tableau de transport rééquilibré de ce problème.
3. Trouver une solution initiale de base réalisable en appliquant au problème rééquilibré la méthode
   a) du coin Nord-Ouest,
   b) des coûts minimums,
   c) des pénalités de Vogel.

Laquelle des méthodes est meilleure ? (Justifiez votre réponse !)

.Question bonus :

4. La solution de base trouvée est-elle optimale ? Sinon, chercher une solution optimale et donner la valeur optimale.

Bon courage !

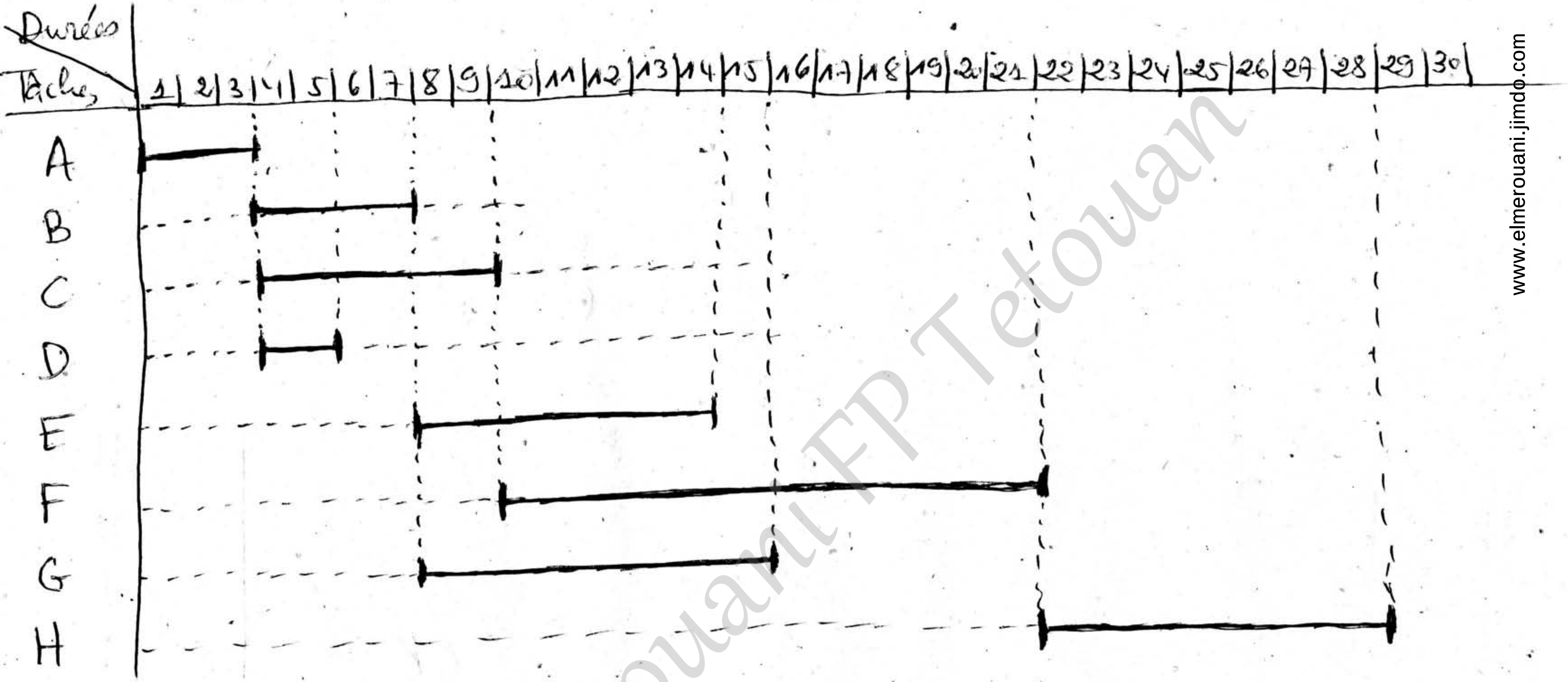
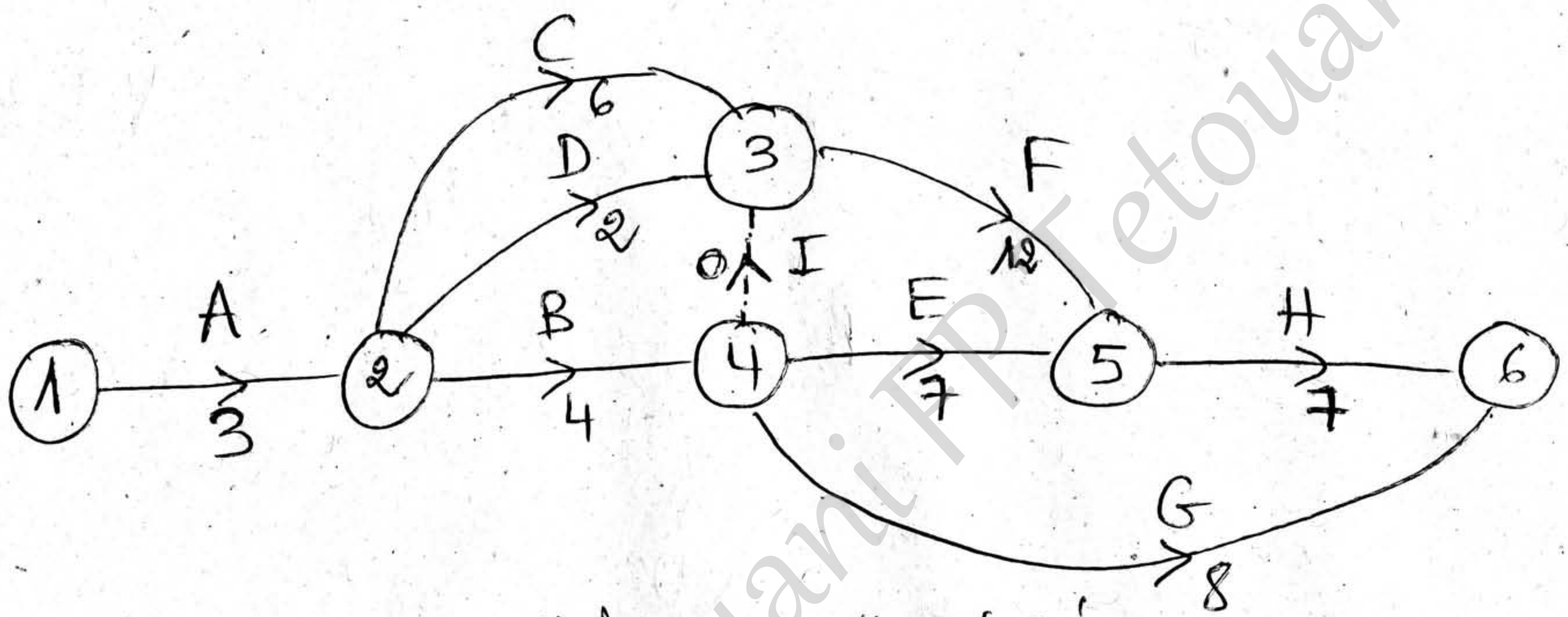


Diagramme de GANTT

(1)



la tâche I est fictive, de durée zéro.

<u>Graphe PERT</u>

La durée totale de ce projet est donnée directement par GANTT, c'est 28 semaines.

2°) • B, C et D sont simultanées. (d'après PERT)

• F, E et G " " "

ce qu'on peut aussi voir sur GANTT.

3°)

Tâches	DTO	FTO	DTA	FTA	MT	IP=(DTO, FTA)
A	0	3	0	3	0	(0,3)
B	3	7	10	14	7	(3,14)
C	3	9	3	9	0	(3,9)
D	3	5	7	9	4	(3,9)
E	7	14	14	21	7	(7,21)
F	9	21	9	21	0	(9,21)
G	7	15	20	28	13	(7,28)
H	21	28	21	28	0	(21,28)

4°) Les tâches qui peuvent être retardées sans compromettre la durée totale de ce projet sont les tâches non critiques. ((Pour déterminer ces tâches, il faut d'abord trouver les tâches critiques → (Ce sont ceux qui ont une MT ≠ 0)) (d'après PERT).

Tous les chemins possibles sont :

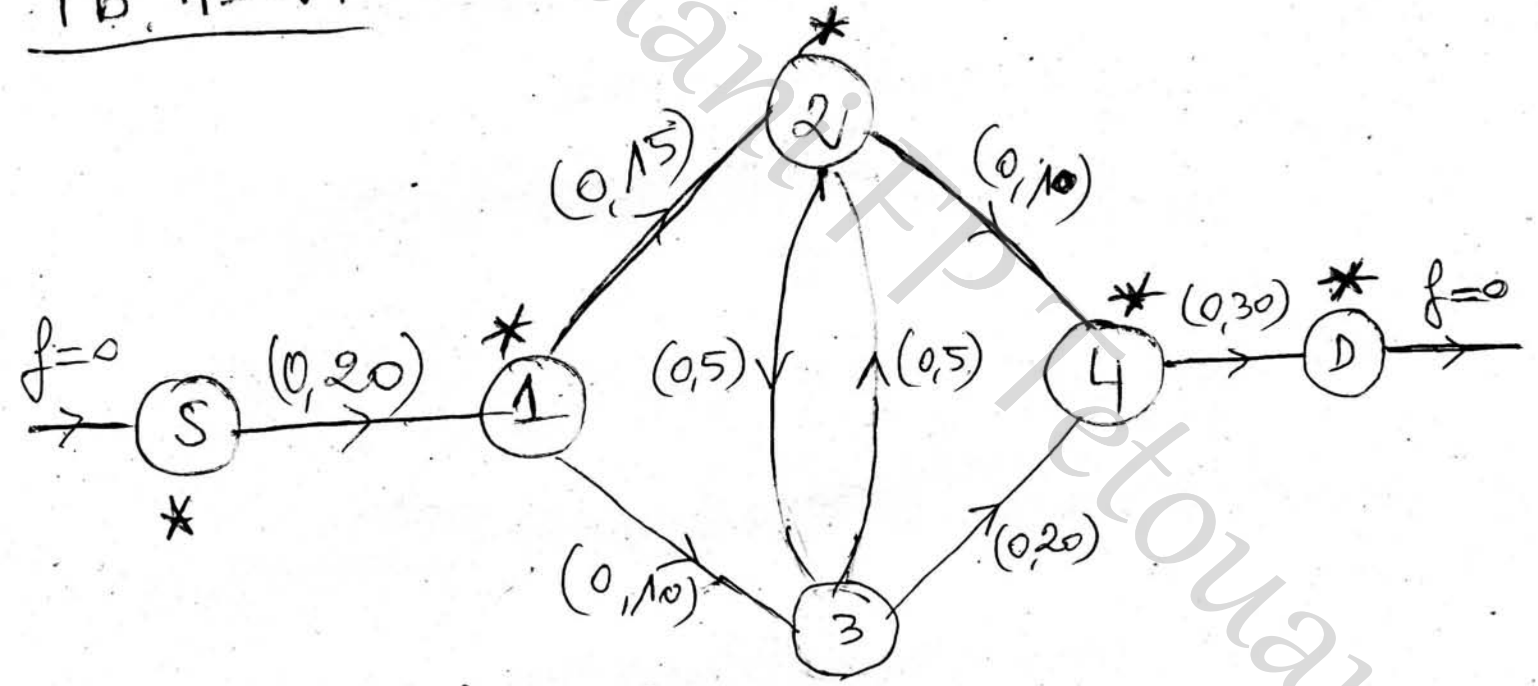
• (A, B, E, H), de longueur : 3+4+7+7 = 21
• (A, C, F, H), " : 3+6+12+7 = 28
• (A, D, F, H), " : 3+2+12+7 = 24
• (A, B, G, H), " : 3+4+8+7 = 22
• (A, B, F, H), " : 3+4+12+7 = 26

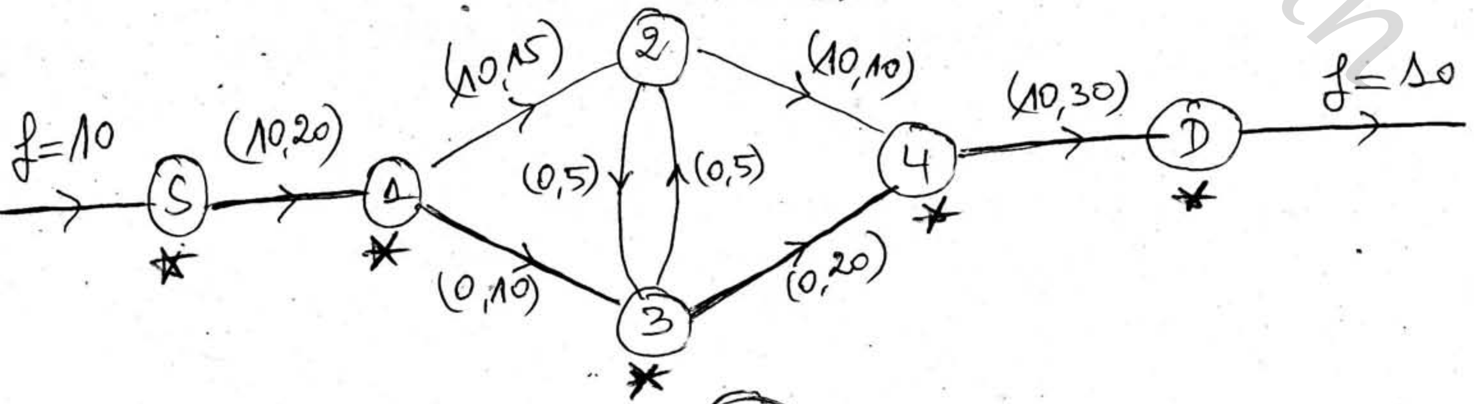
Il y a un seul chemin critique qui est (A, C, F, H) car sa longueur est égale à la durée du projet (28 semaines)

D'où, les tâches critiques sont : A, C, F et H (se trouvant sur le chemin critiques)

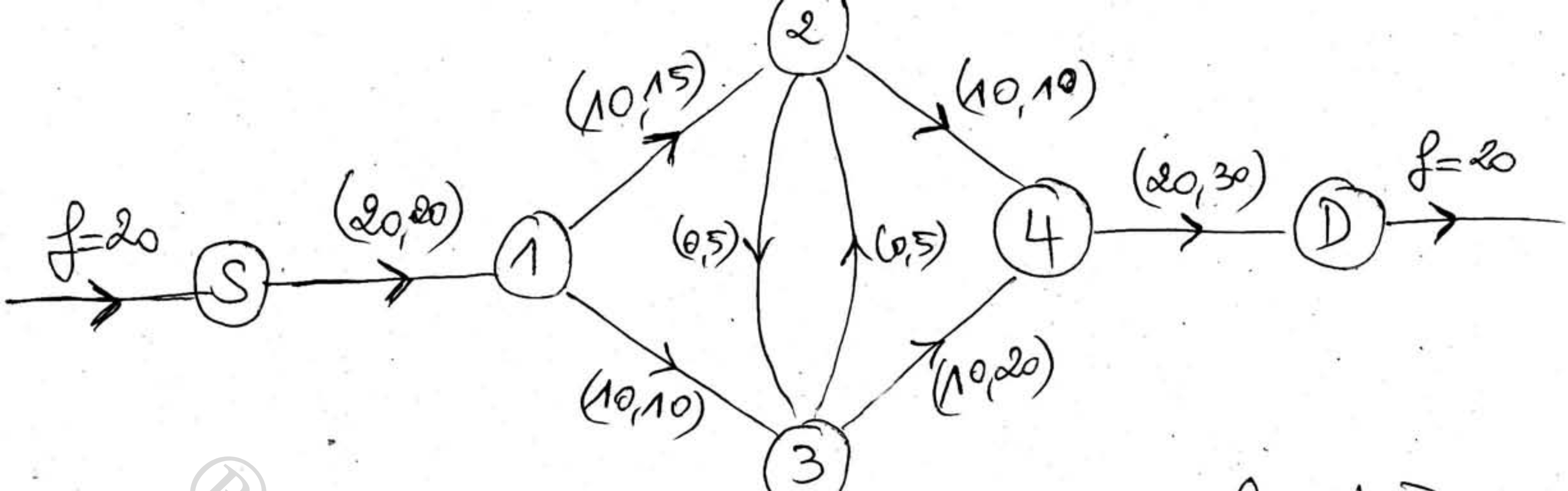
<u>Conclusion</u>: les tâches qui peuvent être retardées sans compromettre la durée totale de ce projet sont B, D, E et G (les tâches non critiques).

<u>Pb. n° 2</u>:

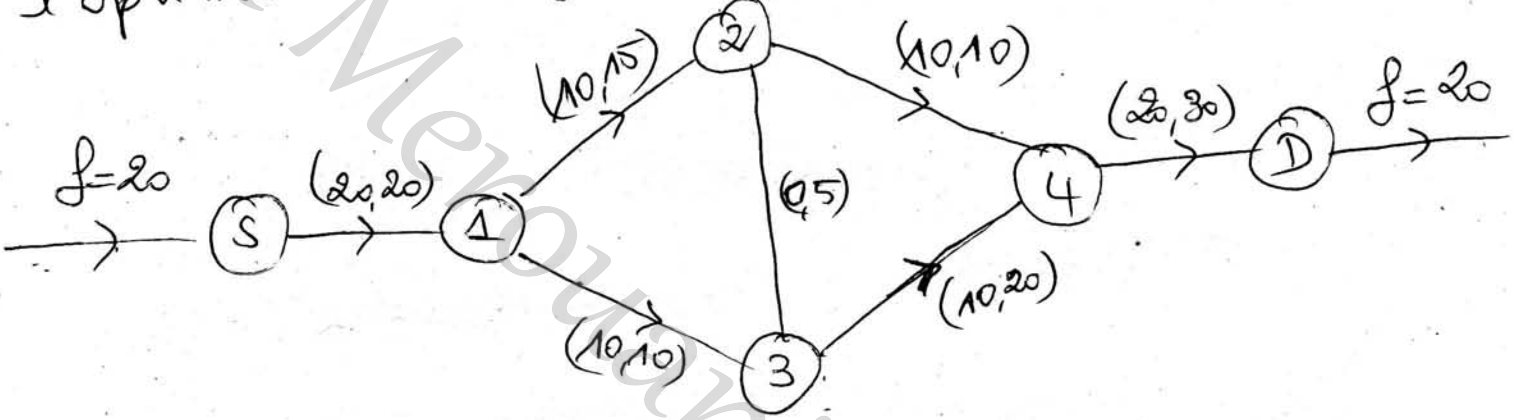




4



On ne peut plus trouver un C.F.A. On est à l'optimum et le flot max est 20



Pb. n°3 :

1°) Activités — Amplitudes

Nbre d'unités qui passe par l'arc (i,j) $\longrightarrow$ x_{ij}

Fonction économique :

Minimiser $Z = 150x_{13} + 175x_{14} + 110x_{21} + 125x_{24} + 120x_{34} + 100x_{35} + 200x_{45} + 150x_{46} + 150x_{65}$

Contraintes :

contraintes de conservation de flot :

nœud 1 : $20 + x_{21} = x_{13} + x_{14}$

nœud 2 : $20 = x_{21} + x_{24}$

nœud 3 : $x_{13} = x_{34} + x_{35}$

nœud ④ : $x_{14}+x_{24}+x_{34}=x_{45}+x_{46}$

nœud ⑤ : $x_{35}+x_{45}+x_{65}=20$

nœud ⑥ : $x_{46}=x_{65}+20$

Contraintes de capacités :

$x_{13}\leqslant 20$; $x_{14}\leqslant 15$; $x_{21}\leqslant 10$; $x_{24}\leqslant 15$; $x_{35}\leqslant 10$; $x_{45}\leqslant 30$; $x_{46}\leqslant 25$;

Contraintes de non-négativités : $x_{ij}\geqslant 0$

Donc le modèle cherché est :

$$\text{Min } Z=150x_{13}+175x_{14}+110x_{21}+125x_{24}+120x_{34}+100x_{35}+200x_{45}+150x_{46}+150x_{65}$$

$$\text{Sujet à }\begin{cases} x_{13}+x_{14}-x_{21}=20\\ x_{21}+x_{24}=20\\ x_{34}+x_{35}-x_{13}=0\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}-x_{45}-x_{46}=0\\ x_{35}+x_{45}+x_{65}=20\\ x_{46}-x_{65}=20\\ x_{13}\leqslant 20;\ x_{14}\leqslant 15;\ x_{21}\leqslant 10;\ x_{24}\leqslant 15;\\ x_{35}\leqslant 10;\ x_{45}\leqslant 30;\ x_{46}\leqslant 25\\ x_{ij}\geqslant 0\ ;\ \forall i,j \end{cases}$$

2°) On applique l'algorithme du simplexe (ou une de ses variantes) pour résoudre ce modèle.

Pb. n°4 :

1°) Activités

Amplitudes

Quantités transportée de l'Entrepôt E_i vers le client $C_j \rightarrow x_{ij}$

Fonction économique :

Minimiser $Z = 2x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + x_{23} + 5x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33}$

Contraintes :

Disponibilité :
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 35 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20 \end{cases}$$

Demande :
$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15 \end{cases}$$

non-négativités $x_{ij} \geq 0 \;;\; \forall i, j$

Donc le modèle linéaire cherché est :

$$\text{Min } Z = 2x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + x_{23} + 5x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33}$$

sujet à
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 35 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15 \\ x_{ij} \geq 0 \;;\; \forall i, j \end{cases}$$

On peut résoudre ce modèle par le simplexe, mais il n'est pas le plus efficace. Alors on peut utiliser soit la méthode du coin nord-ouest, soit la méthode des coûts minimum, ou la méthode des pénalités de Vogel.

2°) Disponibilités totales = 15+35+20 = 70

demandes totales = 15+30+15 = 60

Disponibilités ≠ demandes, donc le problème devra être équilibré, parce que les méthodes qui s'appliquent à ce problème ne s'appliquent que si le problème est équilibré.

Pour établir l'équilibre, on ajoute un client fictif C4, dont la demande coïncide avec l'écart entre la disponibilité totale et la demande totale, soit 10 unités.

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibilités
E_1	2	6	4	0	15
E_2	4	5	1	0	35
E_3	5	8	3	0	20
Demandes	15	30	15	10	= 70

3°) a) Méthode du coin Nord-Ouest :

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibilité
E_1	15				$\cancel{15}$ 0
E_2	0	30	5		$\cancel{35}$ $\cancel{5}$ 0
E_3			10	10	$\cancel{20}$ 10
Demandes	$\cancel{15}$ 0	$\cancel{30}$ 0	$\cancel{15}$ $\cancel{10}$ 0	10	

Donc, une solution de base initiale est :

$x_{11} = 15$; $x_{21} = 0$; $x_{22} = 30$; $x_{23} = 5$

$x_{33} = 10$; $x_{34} = 10$

$$Z = 2 \times 15 + 0 \times 4 + 30 \times 5 + 5 \times 1 + 10 \times 3 + 10 \times 0$$
$$= 30 + 150 + 5 + 30 = 215$$

b) Méthode des coûts minimums :

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibilités
E_1	$\boxed{2}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	$\cancel{15}$ 0
E_2	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{1}$ 15	$\boxed{0}$	$\cancel{35}$ $\cancel{20}$ 0
E_3	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 10	$\cancel{20}$ 10
Demandes	$\cancel{15}$ 0	$\cancel{30}$ 10	$\cancel{15}$ 0	$\cancel{10}$ 0	

Une solution de base initiale est donc :

$$x_{11} = 15 \;;\; x_{21} = 0 \;;\; x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 15 \;;\; x_{32} = 10 \;;\; x_{34} = 10$$

$$Z = 15 \times 2 + 20 \times 5 + 15 \times 1 + 10 \times 8$$
$$= 30 + 100 + 80 + 15 = 225$$

d) Méthode des pénalités de Vogel :

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibilités	Pénalités
E_1	$\boxed{2}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	$\cancel{15}$ 0	$\cancel{2}$ $\cancel{2}$ 4
E_2	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{1}$ 15	$\boxed{0}$	$\cancel{35}$ $\cancel{20}$ 0	$\cancel{1}$ $\cancel{3}$ 1
E_3	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 10	$\cancel{20}$ 10	$\cancel{3}$ 3
Demandes	$\cancel{15}$ 0	$\cancel{30}$ 10	$\cancel{15}$ 0	$\cancel{10}$ 0		
Pénalités	$\cancel{2}$ 1	$\cancel{1}$ 3	2	0		

Une solution de base initiale est donc :

$x_{11} = 15$; $x_{22} = 20$; $x_{23} = 15$; $x_{31} = 0$

$x_{32} = 10$; $x_{34} = 10$ et $Z = 30 + 100 + 15 + 80$

$\Rightarrow Z = 225$

La meilleure méthode est celle qui a une Z min c'est-à-dire c'est la méthode du coin-Nord-Ouest.
$Z = 215 < 225$ pour les autres.

Question bonus :

La solution trouvée par la méthode du coin-Nord-Ouest est-elle optimale ?

$x_{11} = 15$; $x_{21} = 0$; $x_{22} = 30$; $x_{23} = 5$
$x_{33} = 10$; $x_{34} = 10$.

On va utiliser la méthode des potentiels pour déterminer, pour toute variable hors base, son coût marginal et tester l'optimalité de cette solution initiale.

Le dual de ce problème de transport est :

$$\text{Max } 15V_1 + 35V_2 + 20V_3 + 15W_1 + 30W_2 + 15W_3 + 10W_4$$

Sujet à

$V_1 + W_1 \leq 2$, $V_1 + W_2 \leq 6$, $V_1 + W_3 \leq 4$, $V_1 + W_4 \leq 0$

$V_2 + W_1 \leq 4$, $V_2 + W_2 \leq 5$, $V_2 + W_3 \leq 1$, $V_2 + W_4 \leq 0$

$V_3 + W_1 \leq 5$, $V_3 + W_2 \leq 8$, $V_3 + W_3 \leq 3$, $V_3 + W_4 \leq 0$

Par la théorie de la dualité, pour chaque case de base (i,j) on a $V_i + W_j = C_{ij}$, c'est-à-dire :

$V_1 + W_1 = 2$

$V_2 + W_1 = 4$

$V_2 + W_2 = 5$

$V_2 + W_3 = 1$

$V_3 + W_3 = 3$

$V_3 + W_4 = 0$

On suppose (on prend) $V_1 = 0$ (arbitrairement), alors

$W_1 = 2$; $V_2 = 2$; $W_2 = 3$; $W_3 = -1$

$V_3 = 4$; $W_4 = -4$

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibilités
E_1	[2] 15 [0]	[6] 0 [3]	[4] 0 [5]	[0] 0 [4]	15
E_2	[4] 0 [0]	[5] 30 [0]	[1] 5 [0]	[0] 0 [+2]	35
E_3	[5] 0 [-1]	[8] 0 [1]	[3] 10 [0]	[0] 10 [0]	20
Demande	15	30	15	10	

la solution n'est pas optimale, car la variable hors base x_{31} admet un coût marginal négatif.

Donc x_{31} est une variable d'entrée.

D'où on doit augmenter la variable hors base x_{31} d'une valeur θ pour rééquilibrer les propositions de transport, de façon à respecter à nouveau les disponibilités et les demandes.

	C_1	C_2	C_3	C_4	disponibilités
E_1	$\boxed{2}$ 15 $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ 0 $\boxed{3}$	$\boxed{4}$ 0 $\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 0 $\boxed{4}$	15
E_2	$\boxed{4}$ $0-\theta$ $\boxed{0}$	$\boxed{5}$ 30 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$ $5+\theta$ $\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 0 $\boxed{2}$	35
E_3	$\boxed{5}$ $0+\theta$ $\boxed{-1}$	$\boxed{8}$ 0 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$ $10-\theta$ $\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 10 $\boxed{0}$	20
demandes	15	30	15	10	

La non-négativité des variables x_{21} et x_{33} implique que θ ne peut dépasser $\min\{0, 10\}$

donc, on prend $\theta = 0$

Par conséquent x_{21} est la variable sortante les variables de base sont maintenant

$x_{11}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{33}, x_{34}$

on a, alors

$V_1 + W_1 = 2 \Rightarrow W_1 = 2$

$V_2 + W_2 = 5 \Rightarrow W_2 = 4$

$V_2 + W_3 = 1 \Rightarrow \underline{V_2 = 1}$

$V_3 + W_1 = 5 \Rightarrow V_3 = 3$

$V_3 + W_3 = 3 \Rightarrow W_3 = 0$

$V_3 + W_4 = 0 \Rightarrow W_4 = -3$

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibilités
E_1	$\boxed{2}$ 15 $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ 0 $\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 0 $\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 0 $\boxed{3}$	15
E_2	$\boxed{4}$ 0 $\boxed{1}$	$\boxed{5}$ 30 [illegible]	$\boxed{1}$ 5 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 0 $\boxed{2}$	35
E_3	$\boxed{5}$ 0 $\boxed{0}$	$\boxed{8}$ 0 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$ 10 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 10 $\boxed{0}$	20
Demandes	15	30	15	10	

à cette itération, tous les coûts marginaux des variables hors base sont non-négatifs ; donc la solution obtenue à cette itération est optimale ; elle est égale à :

$x_{11} = 15$; $x_{22} = 30$; $x_{23} = 5$;

$x_{31} = 0$; $x_{33} = 10$; $x_{34} = 10$

$$Z = 30 + 150 + 5 + 30 = 215.$$