Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Contrôle final de Recherche Opérationnelle (Durée : 1h30)

Année Universitaire : 2014/2015
LEF en « Sc. éco. & Gestion »
Sixième semestre (S6)

Problème n° 1:

Soit le problème linéaire suivant:

$$\text{Max } Z = 2x + y$$

$$\text{Sujet à} \quad \begin{cases} x - y \leq 6 \\ -3x + y \leq 12 \\ x + y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce problème en utilisant la méthode graphique.
2. Résoudre ce problème en utilisant l'algorithme du simplexe. Indiquer quelle contrainte est saturée par la solution trouvée et expliquer pourquoi.

Problème n° 2:

Dans le cadre de son projet, le responsable de la société INFO a procédé à la définition d'un certain nombre de tâches à effectuer et à l'évaluation de leurs durées. Celles-ci sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

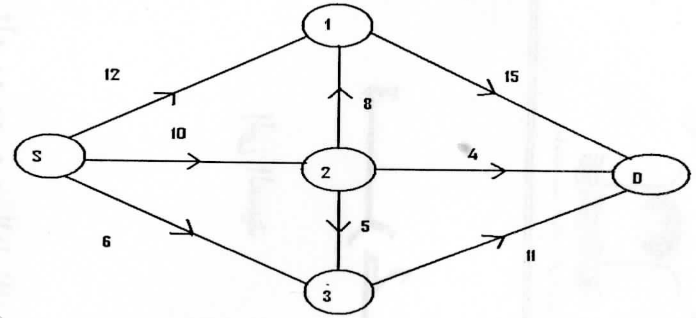
Tâches	Tâches antérieures	Durées (en semaines)
A	----	5
B	D	7
C	B et H	7
D	A	4
E	A	6
F	D	8
G	F	10
H	I	5
I	D et E	3

1. Représenter le graphe PERT et le diagramme de GANTT.
2. Quelle est la durée totale de ce projet ?

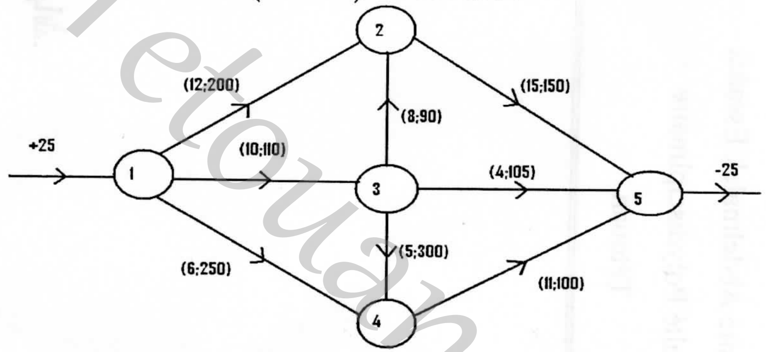
3. Donner pour chacune des tâches de ce projet, les dates de début et fin au plus tôt, ainsi que les dates de début et de fin au plus tard.
4. Quelles sont les tâches qui ne peuvent souffrir un retard et quelles sont celles que l'on peut retarder ?

Problème n° 3:

1. Déterminer le flot maximal à travers le réseau ci-dessous, à partir de la source S jusqu'à la destination D, où les capacités sont les chiffres marqués aux arcs :



2. Donner le modèle linéaire du problème de flot minimum décrit par le graphe suivant, où les valeurs sur chaque arc représentent respectivement la capacité et le coût unitaire (en DH) de cet arc :



Corrigés du Contrôle final

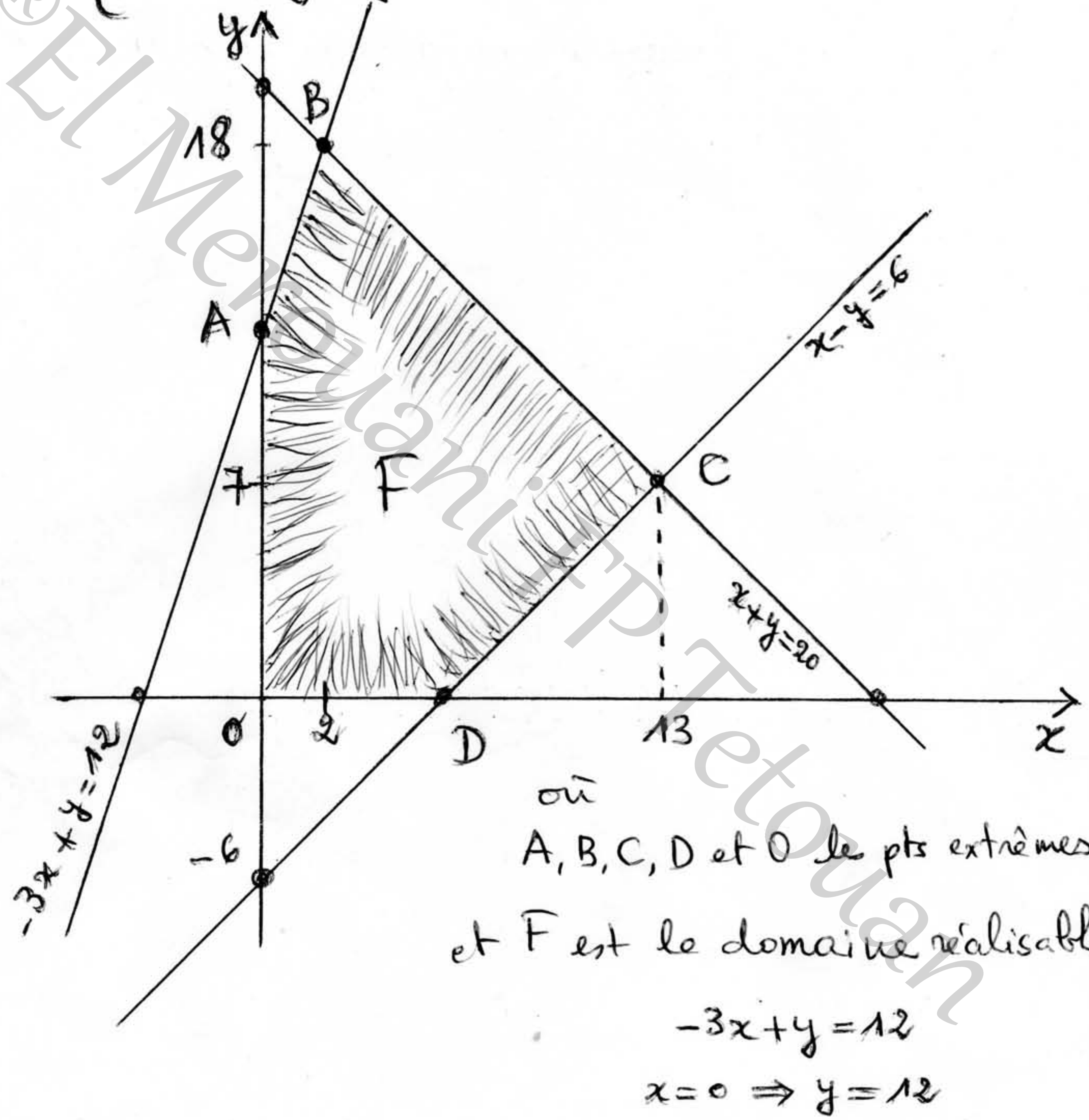
R.O. 2014/2015

Problème n° 1

$$\text{Max } Z = 2x + y$$

$$\text{s.à} \begin{cases} x - y \leq 6 \\ -3x + y \leq 12 \\ x + y \leq 20 \end{cases} \qquad x ; y \geq 0$$

1°)



où

A, B, C, D et O le pts extrêmes

et F est le domaine réalisable

$-3x + y = 12$

$x = 0 \Rightarrow y = 12$

$y = 0 \Rightarrow x = -4$

$x + y = 20$

$x = 0 \Rightarrow y = 20$

* $\boxed{Z_O = 0}$ avec $O(0,0)$

* $\boxed{Z_A = 12}$ avec $A(0,12)$

* $B(x,y)$? $\begin{cases} -3x + y = 12 & ① \\ x + y = 20 & ② \end{cases}$

② - ① $\Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

si $x = 2$ alors $y = 18$

* $\Rightarrow \boxed{Z_B = 4 + 18 = 22}$ où $B(2,18)$

* $C(x,y)$? $\begin{cases} x - y = 6 & ① \\ x + y = 20 & ② \end{cases}$

① + ② $\Rightarrow 2x = 26 \Rightarrow x = 13$

$\Rightarrow y = 7$

* $\Rightarrow \boxed{Z_C = 26 + 7 = 33}$ avec $C(13,7)$

* $\boxed{Z_D = 12}$ où $D(6,0)$

* Sol. opt. est $C(13,7)$

* Valeur opt. est $Z_C = 33$

2°) Après avoir résolu le problème par le simplexe (voir page suivante), on a : $u = 0$ (variable hors base à l'optimum), donc la 1ère contrainte est saturée à l'optimum. De même $h = 0$ pour la même raison, donc la 3ème contrainte est aussi saturée à l'optimum. Par contre $p = 44 \neq 0$, d'où la 2ème contrainte est non-saturée.

2°) Résolution par le simplexe :

Forme standard : $\text{Min } Z = -2x - y$

$$\text{s.à} \begin{cases} x - y + u = 6 \\ -3x + y + p = 12 \\ x + y + h = 20 \\ x, y, u, p, h \geq 0 \end{cases}$$

le tableau initial est :

V.b.	x (V.e)	y	u	p	h	-Z	T.d.
V.s u	$\boxed{1}$ pivot	-1	1	0	0	0	6
p	-3	1	0	1	0	0	12
h	1	1	0	0	1	0	20
-Z	-2	-1	0	0	0	1	0

le 2ème tableau du simplexe est :

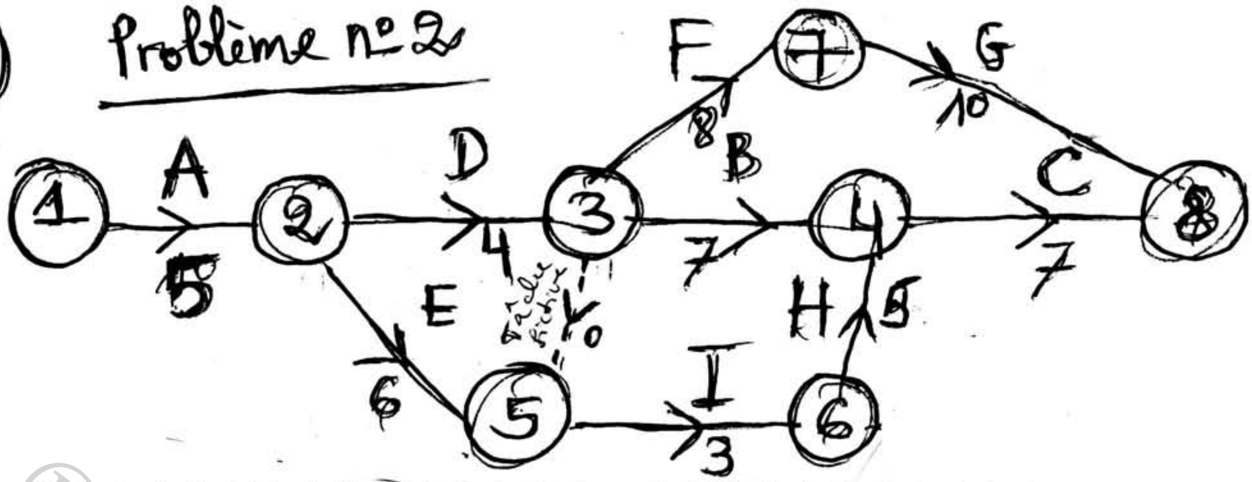
V.b.	x	y (V.e)	u	p	h	-Z	T.d.
x	1	-1	1	0	0	0	6
p	0	-2	3	1	0	0	30
V.s h	0	$\boxed{2}$ pivot	-1	0	1	0	14
-Z	0	-3	2	0	0	1	12

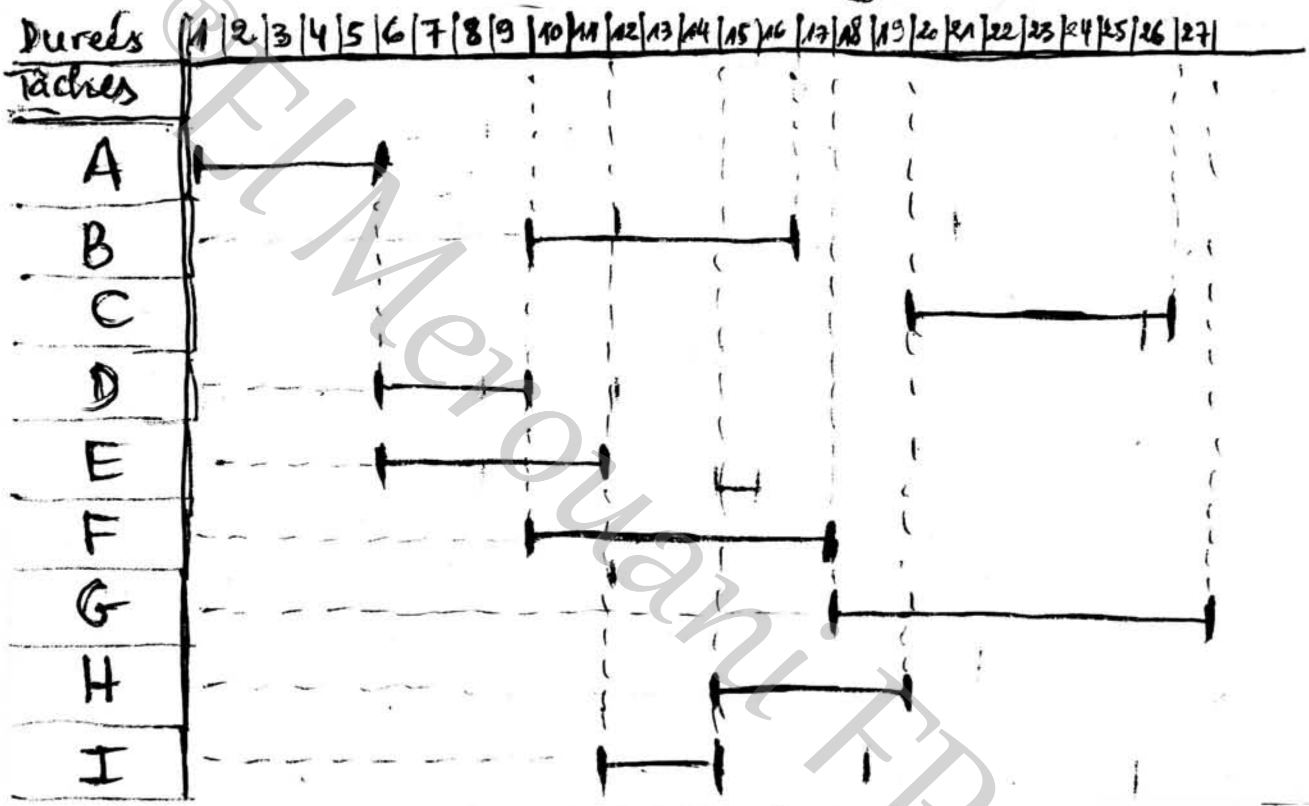
le 3ème tableau du simplexe est :

V.b.	x	y	u	p	h	-Z	T.d.
x	1	0	1/2	0	1/2	0	13
p	0	0	2	1	1	0	44
y	0	1	-1/2	0	1/2	0	7
-Z	0	0	1/2	0	3/2	1	33

D'où la solⁿ opt est : $x = 13$; $y = 7$ et la valeur opt est $Z = 33$

1°) Problème n° 2





2°) On voit directement à partir du diagramme de GANTT que la durée totale de ce projet est 27 semaines

3°)

Tâches	DTO	FTO	DTA	FTA	MT
A	0	5	0	5	0
B	9	16	13	20	4
C	19	26	20	27	1
D	5	9	5	9	0
E	5	11	6	12	1
F	9	17	9	17	0
G	17	27	17	27	0
H	14	19	15	20	1
I	11	14	12	15	1

4°) les tâches qui ne peuvent souffrir un retard sont les tâches critiques. les tâches critiques sont celles qui ont une marge totale nulles c-à-d-

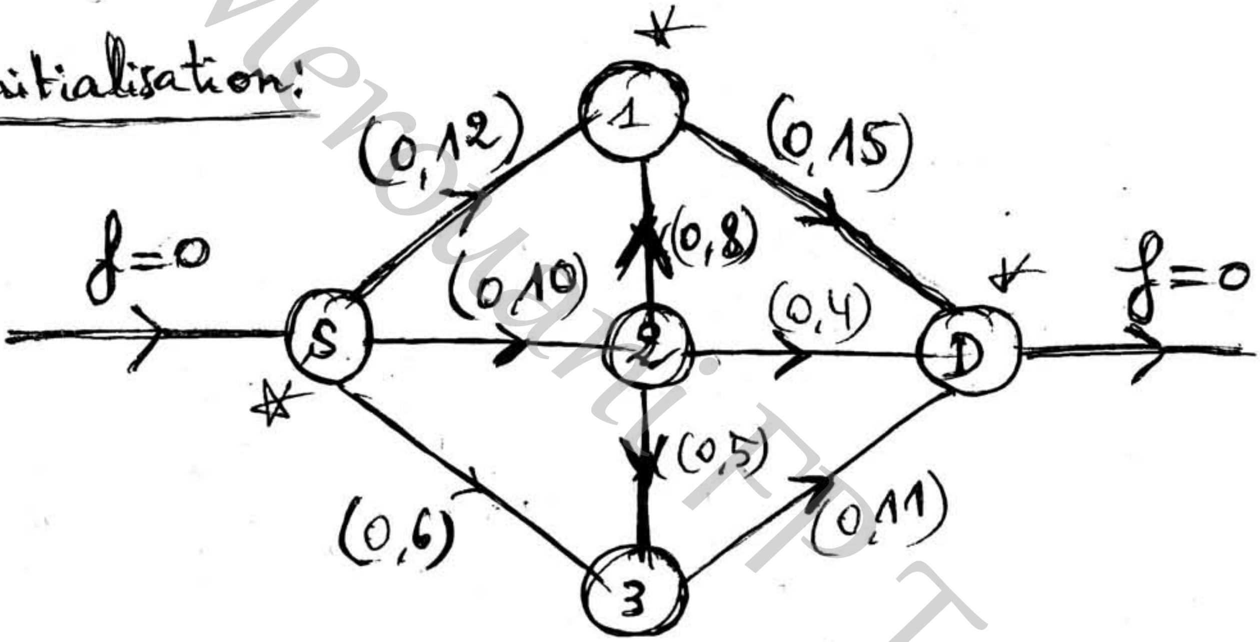
A - D - F - G

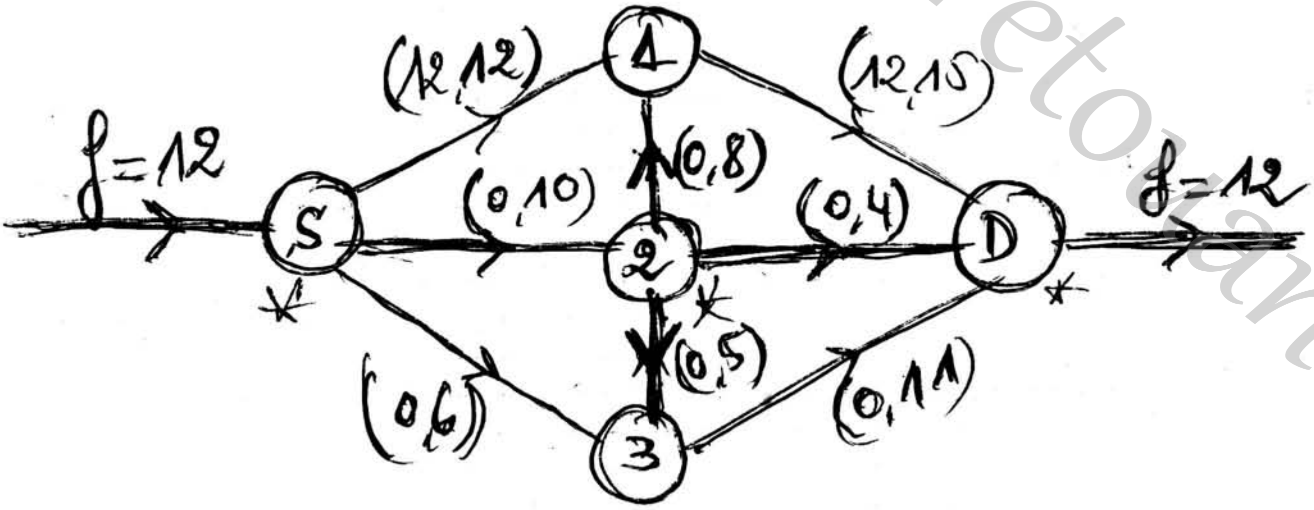
et les autres sont non critiques donc, on peut les retarder et sont B - C - E - H et I

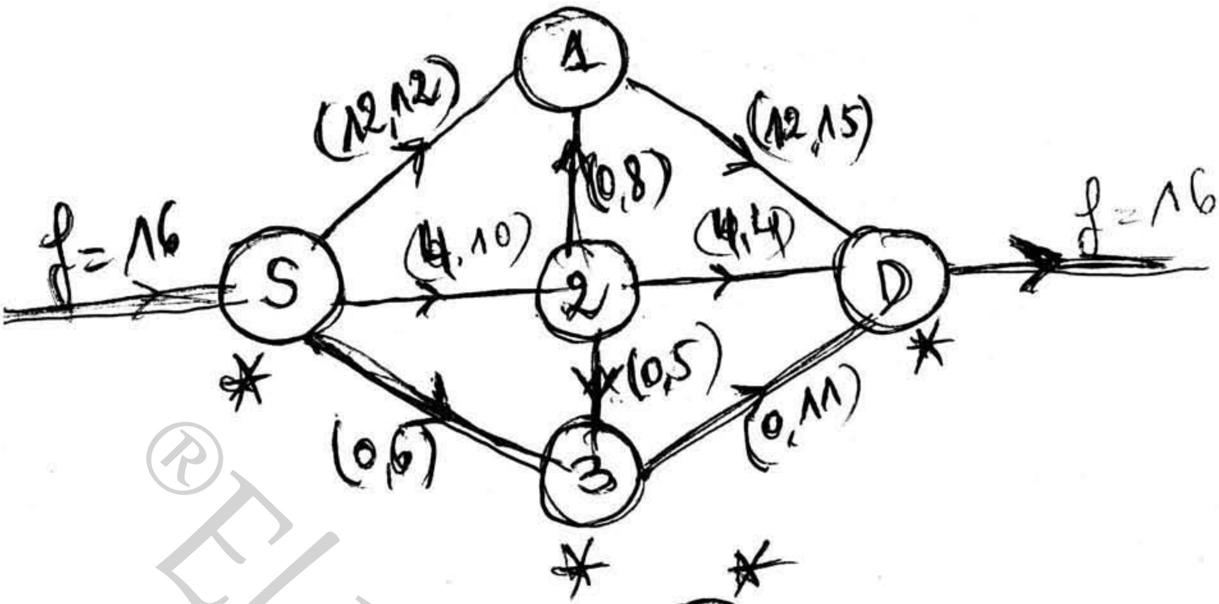
Problème n°3 :

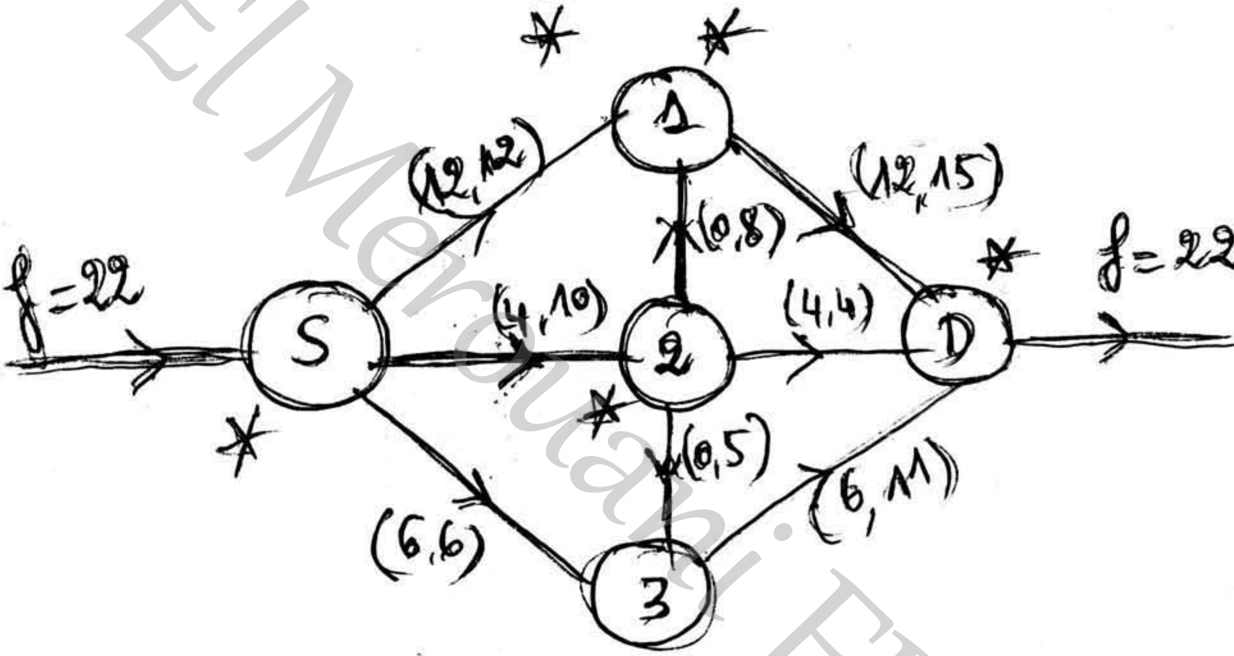
1°)

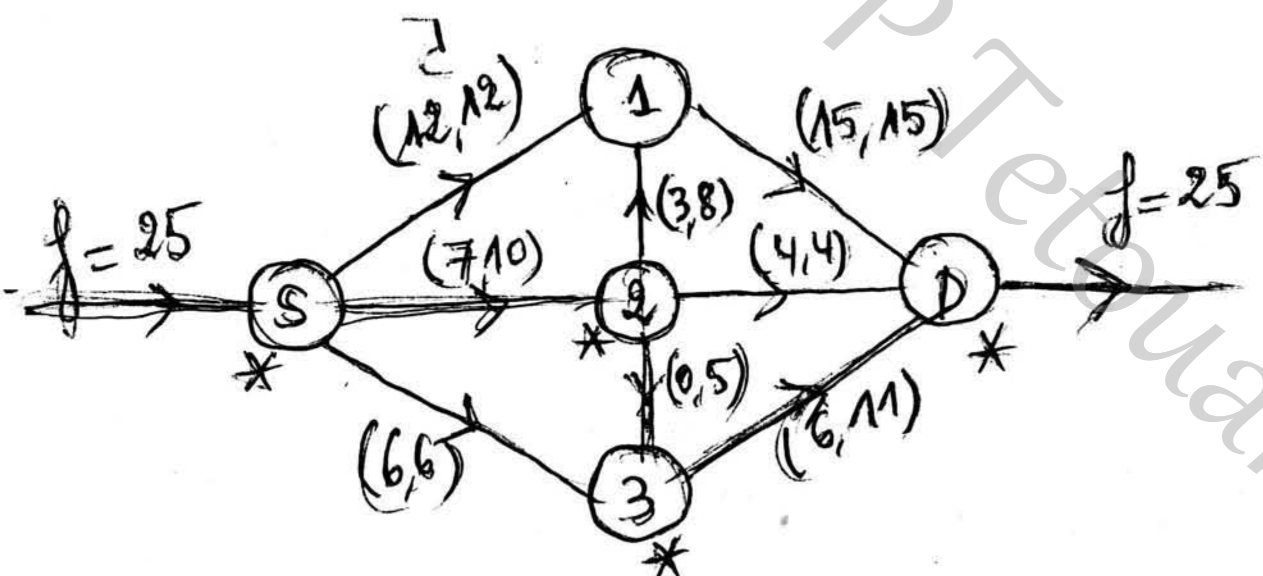
Initialisation :

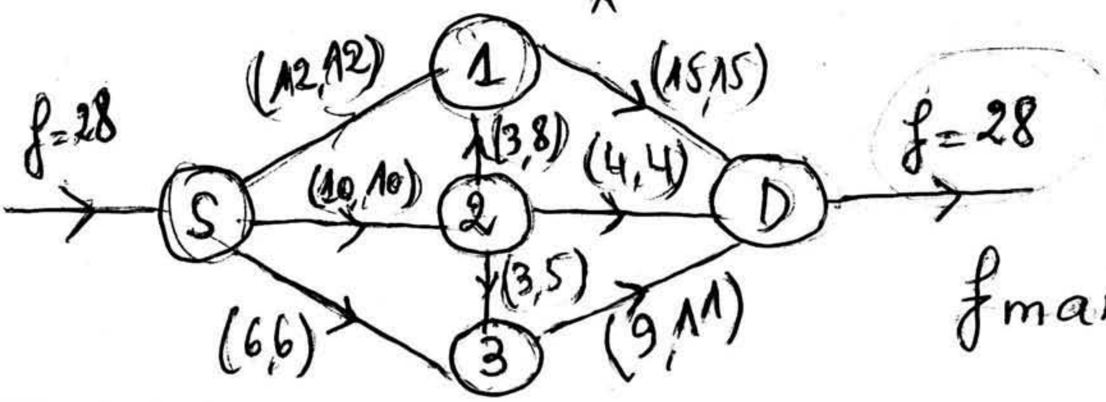





f = 16
S
1
2
3
D
(12,12)
(12,15)
(0,8)
(4,10)
(4,4)
(0,5)
(0,6)
(0,11)
f = 16


f = 22
S
1
2
3
D
(12,12)
(12,15)
(0,8)
(4,10)
(4,4)
(0,5)
(6,6)
(6,11)
f = 22


f = 25
S
1
2
3
D
(12,12)
(15,15)
(3,8)
(7,10)
(4,4)
(0,5)
(6,6)
(6,11)
f = 25


f = 28
S
1
2
3
D
(12,12)
(15,15)
(3,8)
(10,10)
(4,4)
(3,5)
(6,6)
(9,11)
f = 28

$f_{max} = 28$

2°) Activités $\longmapsto$ Amplitudes

Nombres d'unités qui passe par l'arc (i,j) $\longrightarrow$ x_{ij}

Fonction économique : à minimiser

$$Z = 200x_{12} + 110x_{13} + 250x_{14} + 150x_{25} + 90x_{32} + 300x_{34} + 105x_{35} + 100x_{45}$$

Contraintes :

Contraintes de conservation de flot :

nœud (1) : $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 25$

nœud (2) : $x_{12} + x_{32} = x_{25}$

nœud (3) : $x_{13} = x_{32} + x_{34} + x_{35}$

nœud (4) : $x_{14} + x_{34} = x_{45}$

nœud (5) : $x_{25} + x_{35} + x_{45} = 25$

Contraintes de capacités :

$x_{12} \leq 12$; $x_{13} \leq 10$; $x_{14} \leq 6$ $x_{25} \leq 15$

$x_{32} \leq 8$; $x_{34} \leq 5$; $x_{35} \leq 4$; $x_{45} \leq 11$

Contraintes de non-négativitée : $x_{ij} \geq 0$; $\forall\, i;j$

le modèle cherché est, donc :

$$\text{Min } Z = 200x_{12} + 110x_{13} + 250x_{14} + 150x_{25} + 90x_{32} + 300x_{34} + 105x_{35} + 100x_{45}$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} = 25 \\ x_{12} + x_{32} - x_{25} = 0 \\ x_{32} + x_{34} + x_{35} - x_{13} = 0 \\ x_{14} + x_{34} - x_{45} = 0 \\ x_{25} + x_{35} + x_{45} = 25 \\ 0 \leq x_{12} \leq 12 ;\ 0 \leq x_{13} \leq 10 ;\ 0 \leq x_{14} \leq 6 \\ 0 \leq x_{25} \leq 15 ;\ 0 \leq x_{32} \leq 8 ;\ 0 \leq x_{34} \leq 5 ;\ 0 \leq x_{35} \leq 4 \end{cases}$$

$0 \leq x_{45} \leq 11$