Université Abdelmalek Essaadi

Faculté Polydisciplinaire

Tetouan

Résolution d'un problème linéaire binaire par la méthode du Branch and Bound

Réalisé par:

ARACH Soumya

MEHDAOUI Maroua

Encadré par:

Pr. Mohamed El Merouani

Plan

- Introduction
- Exemple illustratif
- Algorithme du Branch and Bound pour le cas binaire (procédure)
- Conclusion

Résolution d'un problème linéaire binaire par la méthode du Branch and Bound

Nous rencontrons en pratique souvent des situations ou toutes les variables, ou une partie d'entre elles, doivent prendre la valeur 0 ou 1.c'est par exemple le cas des problèmes d'affectation ou des problèmes de localisation.

Exemple illustratif

Considérons le modèle linéaire binaire suivant:

Min $Z(x)=2x_1+3x_2+7x_3+7x_4$

Sujet à

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} x_1+x_2-2x_3-5x_4\geq 2 \\ -x_1+2x_2+x_3+4x_4\geq -3 \end{array}\right\} & F \\ \left.\begin{array}{l} x_i=0 \text{ ou } 1,\ i=1,2,3,4 \end{array}\right\} & S \end{array}\right.$$

Dans ce cas, nous allons relaxer les contraintes principales constituant l'ensemble F et garder seulement les contraintes binaires. Nous obtenons ainsi la relaxation:

$$(p_r^0)\begin{cases}\text{Min } z(x)\\ \text{Sujet à}\\ X\in S\end{cases}$$

Tous les couts relatifs de (p^0) sont positifs, ($c_j > 0$, j=1, 2, 3, 4)donc z(0)=0 est une borne inférieure de la fonction économique de (p^0).En conséquence, si x=0 est réalisable pour (p^0) alors c'est aussi une solution optimale de (p^0).

Une borne supérieure de la fonction est donnée par:

$X=(1,1,1,1)^t$ avec $z_s=2+3+7+7=19$.

Première itération :

Séparation: On partitionne S en deux sous ensemble selon la composante X_1:

$$S \cap x_1=0 \quad \text{et } S \cap x_1=1$$

Nous obtenons alors les deux sous-problèmes correspondants ainsi que leurs solutions:

$$(p_r^1 \begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{Sujet à} \\ X \in S \\ X_1=0 \end{cases} \qquad (p_r^2 \begin{cases} \text{Min } Z(x) \\ \text{Sujet à} \\ X \in S \\ X_1=1 \end{cases}$$

$X=(0,0,0,0)^t$
$Z_i=0$

$X=(1,0,0,0)^t$
$Z_i=2$

Critères de cessation de fouille

Pour tester le critère de cessation de fouille (a) pour le sous-programme (P_r^1), posons:

$$\int_1(x) = 0 + x_2 - 2x_3 - 5x_4$$
$$\int_2(x) = 0 + 2x_1 + x_3 + 4x_4$$

La plus grande valeur que peut prendre $\int_1(x)$ est $\int_1(0,1,0,0)^t$ =1<2.

On en déduit que le sous-programme(pr1) est stérilisé par le critère (a).

Pour tester le critère de cessation de fouille (a) pour le sous-programme (pr2),posons:

$g_1(x)=1+x_2-2x_3-5x_4$

$g_2(x)=1+2x_2+x_3+4x_4$

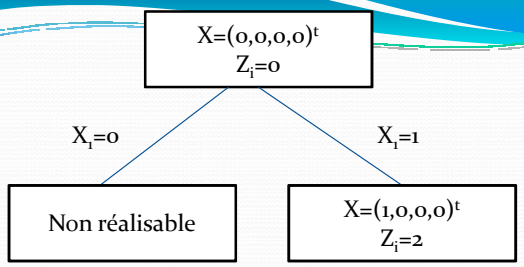
Or,

$g_1(1,1,0,0)^t=2$ et $g_2(1,1,1,1)^t=8$

Donc, le sous-programme (Pr2) peut être réalisable, donc on ne peut pas le stériliser par le critère (a),

Pour les 2 sous-programmes (pr1) et (pr2), on a $z_i<z_s$ donc on ne peut pas stériliser le sous-programme (pr2) par (c).

Après cette première itération, on obtient l'arborescence suivante:



(a)

Deuxième itération :

Séparation: nous partitionnons $S \cap \{x_1=1\}$

En deux sous-ensembles selon la composante x_1:

$S \cap (x_1=1 \text{ et } x_2=0)$ et $S \cap (x_1=1 \text{ et } x_2=1)$

Nous obtenons alors les deux sous-problèmes correspondants ainsi que leurs solutions:

(p_r^3) Min Z(x)
Sujet à
$X \in S$
$X_1=1$
$X_2=0$

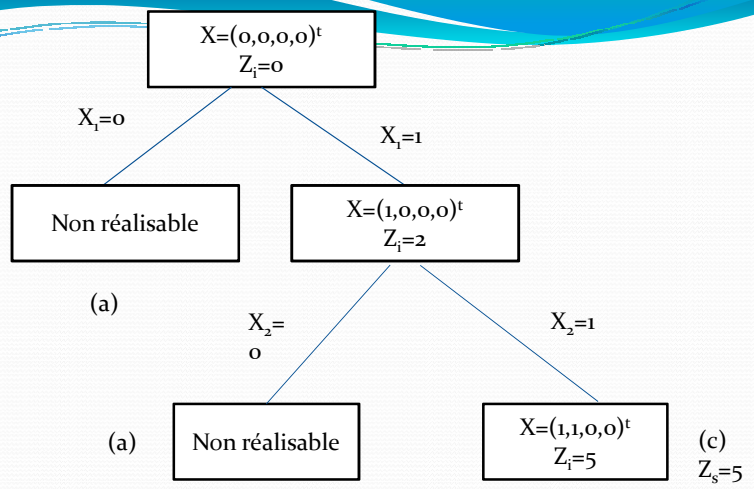
Non réalisable

(p_r^4) Min Z(x)
Sujet à
$X \in S$
$X_1=1$
$X_2=1$

$X=(1,1,0,0)^t$
$Z_i=5$

Critère de cessation de fouille:

Le sous-programme (pr3) est stérilisé par le critère (a) alors que le sous programme pr4 est stérilisé par e critère (c),Après cette deuxième itération, on obtient l'arborescence suivante:



La solution optimale de (p^0) est donc $x = (1,1,0,0)$ et $z = z_s = 5$

Algorithme du Branch and bound pour le cas binaire

Nous supposons que les couts relatifs sont positifs et ordonnés :

$$0 \leq C_1 \leq C_2 <\ldots \leq C_n$$

Ceci n'est pas une restriction puisque si $C_j < 0$ alors nous effectuons le changement de variable $Y_j=1-X_j$. Nous réordonnons ensuite les variables en utilisant le changement de variables adéquat (Exemple).

Procédure

Initialisation : si=0 est réalisable, arrêter la procédure.

Sinon, poser $Z_s=\sum C_j$, $Z_i=C_1$ et $X^i=(1,0,\ldots,0)^t$

Si X_i est réalisable, arrêter la procédure.

Sinon , poser k = 1.

1)Séparation : choisir un sous-ensemble des solutions réalisables et le partitionner en 2 sous-ensembles en ajoutant les contraintes « $X_k=0$ « et « $X_k=1$ ».

2)Evaluation : pour chaque nouveau sous-ensemble déterminer une bonne inférieure Zi de la fonction économique en posant :

$$X_k = (X^k_1, \ldots, X^k_k, 1, 0, \ldots, 0)^t$$

Ou $X_i = X^k_i$ pour i=1,2,….,k, sont les contraintes qui définissent le sous-ensemble en considération .

3) Stérilisation : nous éliminons des prochaines considérations le sous –ensemble en question, si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

Il y a au moins une contrainte qui n'est satisfaite par aucun point du sous-ensemble $Z_i \geq Z_s$

X^I est réalisable ($Z_i \geq Z_s$). Dans ce cas, xi est le point incumbent .

Poser $Z_s = Z_i$

4) ***Test :*** si tous les sous-ensembles sont stérilisés, arrêter la procédure.

Sinon, poser k=k+1 et retourner 1.

Rendre les couts relatifs positifs et croissants

Transformer le problème suivant en un problème en variables binaires(0,1) :

$$\begin{cases} \text{Min } Z = 3X_1 - 4X_2 \\ \text{Sujet à} \\ X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -2 \leq X_1 \leq 4 \\ 1 \leq X_2 \leq 3 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$ *entiers*

En général, si x est entier et si $0 \leq x \leq k$, alors nous pouvons substituer une combinaison linéaire :

$$X = Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + \ldots + 2^P Y_{P+1}$$

De p+1 variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p+1}$ {0,1}, p étant le plus petit entier tel que :

$$k \leq 2^{P+1} - 1.$$

Or, $0 \leq X_1 + 2 \leq 6$, donc il existe y1,y2,y3 .....{0,1} tel que :

$$X_1 = -2 + Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3$$

De même, $1 \leq X1 + 2 \leq 6$, donc il existe Y_1, Y_2, Y_3 .....{0,1} tel que :

$$X_1 = 1 + Y_4 + 2Y_5$$

Donc le problème (P) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3Y_1 + 6Y_2 + 12Y_3 - 4Y_4 - 8Y_5 - 10 \\ \text{Sujet à} \\ Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 - 2Y_4 \leq 16 \\ Y_1 + 2Y_3 + 4Y_3 \leq 6 \\ Y_4 + 2Y_5 \leq -1 \\ Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Pour rendre les couts relatifs positifs et ordonnés :

$$0 \leq C_1 \leq C_2 < \ldots \leq C_n,$$

posons :

$U_1 = Y_1$

$U_2 = 1 - Y_4$

$U_3 = Y2$

$U_4 = 1 - Y_5$

$U_5 = Y_3$

Substituons ces valeurs dans le problème précédant pour obtenir le problème équivalent :

$$\begin{cases} \text{Min } Z = 3U_1 + 4U_2 + 6U_3 + 8U_4 + 12U_5 + 2 \\ \text{Sujet à} \\ U_1 + 2U_2 + 2U_3 + 4U_4 + 4U_5 \leq 22 \\ U_1 + 2U_3 + 4U_5 \leq 6 \\ -U_2 - 2U_4 \leq -1 \\ U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Conclusion

MERCI
POUR
VOTRE
ATTENTION
☺