Chapitre 2: **Modèles linéaires (de Box-Jenkins)**

Prof. Mohamed El Merouani
Département de Statistique et Informatique
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Université Abdelmalek Essaâdi
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

Modèle MA(q):

- Un modèle MA(q) est donné par

$$Y_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

- ou en utilisant l'opérateur des retards:

$$Y_t= (1- \theta_1 L- \theta_2 L^2-\ldots- \theta_q L^q)\, \varepsilon_t =\theta(L)\varepsilon_t$$

- Si on multiplie les deux membres par de ce modèle par $Y_{t-\tau}$, et si on calcul des espérances mathématiques, …

on obtient les résultats suivants:

$$\gamma_0 = \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \left(-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q\right)\sigma_\varepsilon^2 & \tau = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Par conséquent, dans les auto-covariances existe une brusque coupure en q, puisqu'après ce retard leurs valeurs sont égales à 0.

- Le même phénomène se présente avec les coefficients d'auto-corrélations qui viennent données par:

$$R_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & \tau = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

- Lorsqu'on a analysé les propriétés d'un MA(1), on a remarqué que $|R_1| \leq 1/2$.
- En général, les coefficients des auto-corrélations R_τ d'un MA(q) sont bornés.

On donne les valeurs maximales des coefficients des auto-corrélations d'un MA de différents ordres.

Ordre du retatrd (τ)	**Ordre du processus des moyennes mobiles (q)**												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,50	0,71	0,81	0,87	0,90	0,92	0,94	0,95	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98
2		0,50	0,50	0,71	0,71	0,81	0,81	0,87	0,87	0,90	0,90	0,92	0,92
3			0,50	0,50	0,50	0,71	0,71	0,71	0,81	0,81	0,81	0,87	0,87
4				0,50	0,50	0,50	0,50	0,71	0,71	0,71	0,71	0,81	0,81
5					0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,71	0,71	0,71	0,71
6						0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,71	0,71
7							0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
8								0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
9									0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
10										0,50	0,50	0,50	0,50
11											0,50	0,50	0,50
12												0,50	0,50
13													0,50

- Pour qu'un MA(q) soit inversible, il faut que les racines de l'équation polynomiale:

$$1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\ldots-\theta_q L^q=0$$

tombent en dehors du cercle unité.

Modèles mixtes auto-régressifs-moyennes mobiles (ARMA):

- Un modèle ARMA(p,q) est définie par:

$$Y_t\text{-}\Phi_1 Y_{t-1}\text{-}\Phi_2 Y_{t-2}\text{-}\ldots\text{-}\Phi_p Y_{t-p}=\varepsilon_t\text{-}\theta_1\varepsilon_{t-1}\text{-}\theta_2\varepsilon_{t-2}\text{-}\ldots\text{-}\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

- En utilisant les opérateurs polynomials de retards, le modèle vient dans sa forme compacte:

$$\Phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

- Pour que le modèle soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation polynomiale

$$\Phi(L)=1\text{-}\ \theta_1 L\text{-}\ \theta_2 L^2\text{-}\ldots\text{-}\ \theta_q L^q=0$$

tombent en dehors du cercle unité.

- Si les conditions de stationnarité sont vérifiées, le modèle ARMA(p,q) peut s'exprimer comme un MA(∞) et se représente de la forme suivante:

$$Y_t = \frac{\theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

- Par conséquent, les coefficients de l'opérateur polynolial $\psi(L)$, qui a une infinité de termes, doivent satisfaire l'identité suivante:

$$\Phi(L)\psi(L) \equiv \theta(L)$$

ou, par une notation plus détaillée,

$$\left(1-\Phi_1 L-\ldots-\Phi_p L^p\right)\left(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\ldots\right)\equiv\left(1-\theta_1 L-\ldots-\theta_q L^q\right)$$

A partir de cette identité, on peut déduire un ensemble d'équations qui nous donnent les ψ_i, en fonction des coefficients Φ_h et θ_i.

Ainsi, **dans un modèle ARMA(1,1)**, l'identité antérieure sera:

$$\left(1-\Phi_1 L\right)\left(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\ldots\right)\equiv\left(1-\theta_1 L\right)$$

Développant le produit du premier membre et regroupant selon le degré de l'opérateur retard, on obtient:

$$\left(1+(\psi_1-\Phi_1)L+(\psi_2-\Phi_1\psi_1)L^2+(\psi_3-\Phi_1\psi_2)L^3+\ldots\right)\equiv\left(1-\theta_1 L\right)$$

- En égalisant, terme à terme, les coefficients des différentes puissances de L des deux membres, on obtient:

$$\psi_1-\Phi_1=-\theta_1 \quad \text{d'où} \quad \psi_1=\Phi_1-\theta_1$$

$$\psi_2-\Phi_1\psi_1=0 \quad \text{d'où} \quad \psi_2=\Phi_1\psi_1$$

- Pour τ>1, les coefficients ψ_τ peuvent s'obtenir de forme récursive à partir de l'équation aux différences

$$\psi_\tau=\Phi_1\psi_{\tau-1} \quad \text{pour } \tau>1$$

- De forme analogue, dans un modèle ARMA(p,q), les coefficients $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_i$ peuvent s'obtenir à partir de l'identité

$$\Phi(L)\psi(L) \equiv \theta(L)$$

- Les valeurs de ψ_τ pour τ>q peuvent se déduire de l'équation aux différences suivantes:

$$\psi_\tau = \Phi_1\psi_{\tau-1} + \ldots + \Phi_p\psi_{\tau-p} \qquad \tau > q$$

- Pour qu'un modèle ARMA(p,q) soit inversible, il faut que les racines de l'équation polynomiale $\Phi(L)=1- \theta_1 L- \theta_2 L^2 -\ldots- \theta_q L^q=0$ tombent en dehors du cercle unité.

- Si les conditions d'inversibilité sont verifiées, le modèle ARMA(p,q) peut s'exprimer en fonction d'un AR(∞):

$$\varepsilon_t = \frac{\Phi(L)}{\theta(L)} Y_t = \pi(L) Y_t$$

où $\quad \pi(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots$

- Les coefficients de l'opérateur polynomial $\pi(L)$ doivent satisfaire l'égalité suivante:

$$\pi(L)\theta(L) \equiv \Phi(L)$$

- Par un raisonnement identique à celui fait pour passer à un MA(∞), on obtient que, pour τ>p, les coefficients π_τ vérifient l'équation aux différences suivante

$$\pi_\tau = \theta_1 \pi_{\tau-1} + \ldots + \theta_q \pi_{\tau-q} \qquad \tau > p$$

- Dans le modèle ARMA(p,q), la moyenne est nulle. Si on ajoute au second membre un terme constant δ, la moyenne du processus se déduit de l'expression suivante:

$$E[\Phi(L)Y_t] = \delta + E[\theta(L)\varepsilon_t]$$

- Donc $\Phi(L)E(Y_t) = \delta$

- Si le processus est stationnaire, alors $E(Y_t)$=μ, pour tout t, et alors

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 L - \ldots - \Phi_p L^p} = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \ldots - \Phi_p}$$

puisque lorsqu'on applique l'opérateur L à une constante –dans ce cas δ- on obtient la valeur de la constante elle-même.

- Dans la suite, nous examinons les propriétés d'un modèle ARMA(1,1), pour les généraliser, après, à un processus ARMA(p,q).

Modèle ARMA(1,1):

- Un modèle ARMA(1,1) est donné par l'expression

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_t \varepsilon_{t-1}$$

- En multipliant les deux membre du modèle par $Y_{t-\tau}$ et en prenant les espérances de tous les termes, on obtient:

$$\gamma_\tau = E[Y_t Y_{t-\tau}] = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} + E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] - \theta_1 E[\varepsilon_{t-1} Y_{t-\tau}]$$

- En tenant compte que $E[\varepsilon_t Y_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$$E[\varepsilon_{t-1} Y_t] = E[\varepsilon_{t-1}(\Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = (\Phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

- Pour τ=0, on obtient l'expression suivante

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\Phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

- Pour τ=1, on trouve facilement,

$$\gamma_1 = \Phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

- Pour τ>1, il résulte que

$$\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} \quad ; \qquad \tau > 1$$

- Si on substitue la valeur de γ_1 trouvée pour τ=1, dans l'expression trouvée pour τ=0, on obtient

$$\gamma_0 = \Phi_1 [\Phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2] + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\Phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

- Après, quelques opérations, on trouve

$$\gamma_0 = \frac{1-2\theta_1\Phi_1+\theta_1^2}{1-\Phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

- Et si on substitue cette valeur obtenue dans l'expression pour τ=1, et après quelques opérations, on obtient

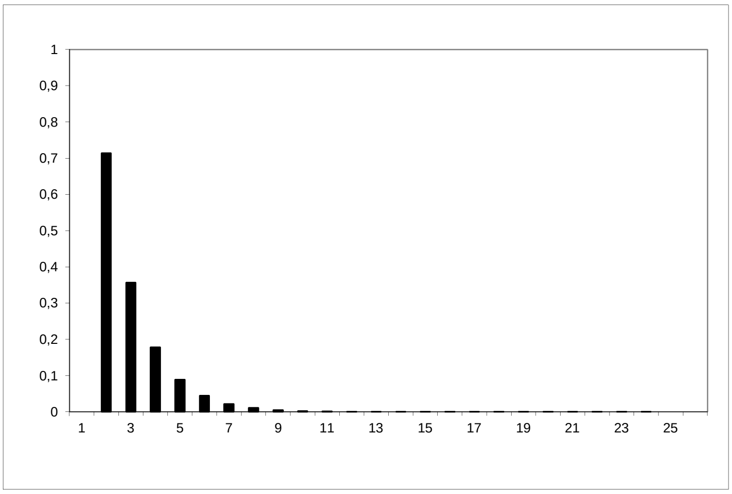
$$\gamma_1 = \frac{(1-\Phi_1\theta_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1-\Phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

- En divisant cette dernière expression de γ_1 et l'expression de γ_τ (τ>1) obtenue avant, par γ_0, on obtient la suite suivante des coefficients d'auto-corrélations

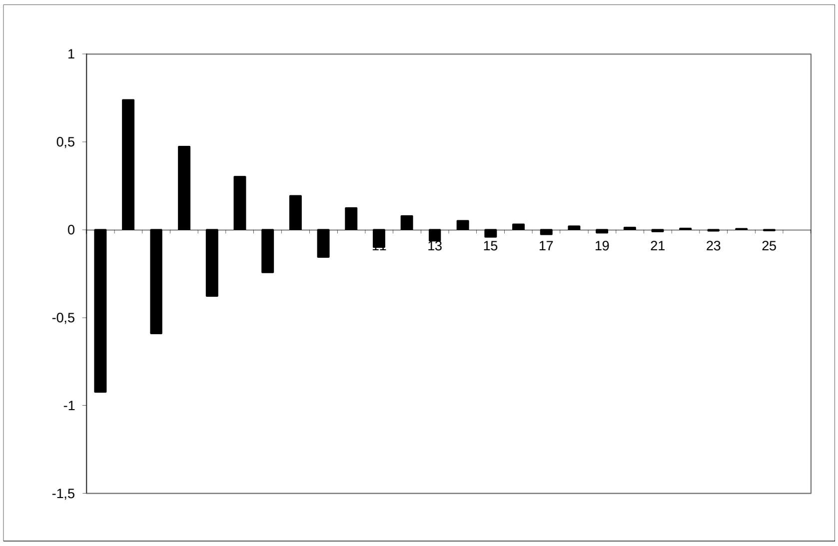
$$R_1 = \frac{(1-\Phi_1\theta_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1-2\theta_1\Phi_1+\theta_1^2}$$

$$R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1} \quad ; \qquad \tau > 1$$

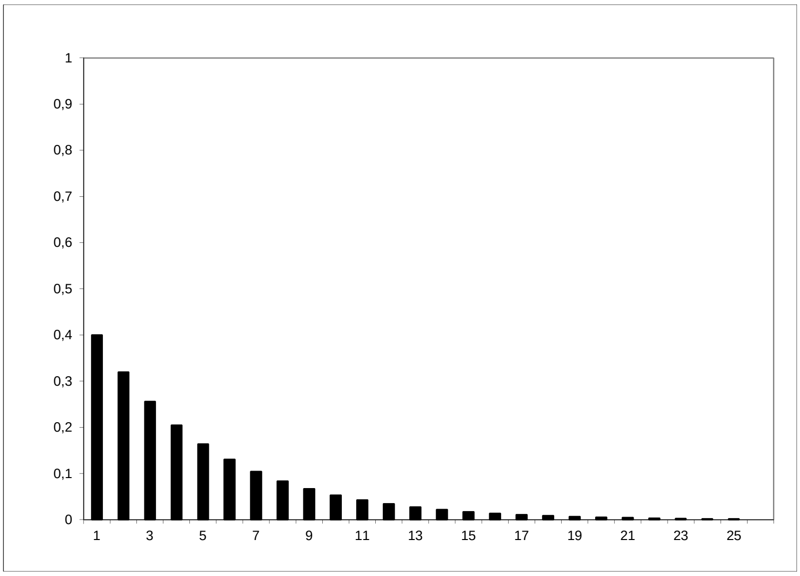
Dans les figures suivantes, on représente la fonction d'auto-corrélation correspondante à quatre modèles ARMA(1,1).



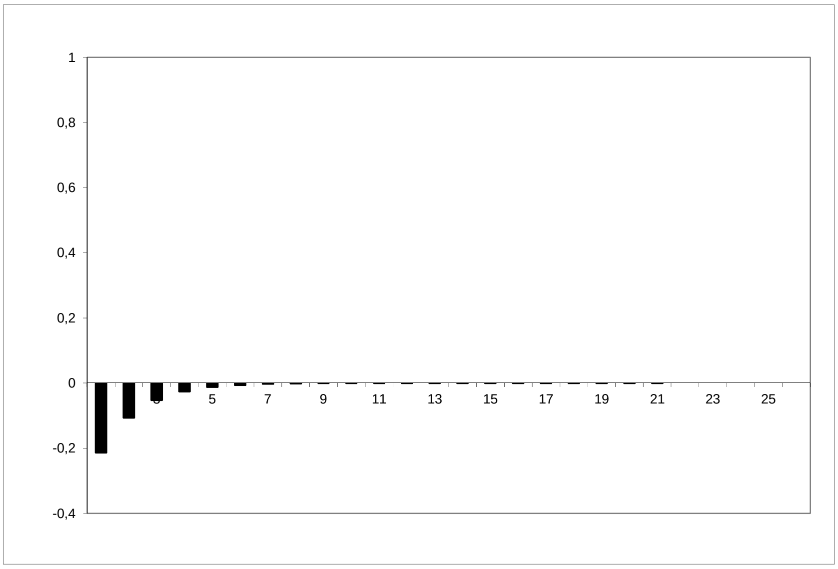
(a) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t+0,5ε_{t-1}



(b) Y_t+0,8Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}



(c) Y_t-0,8Y_{t-1}=ε_t-0,5ε_{t-1}

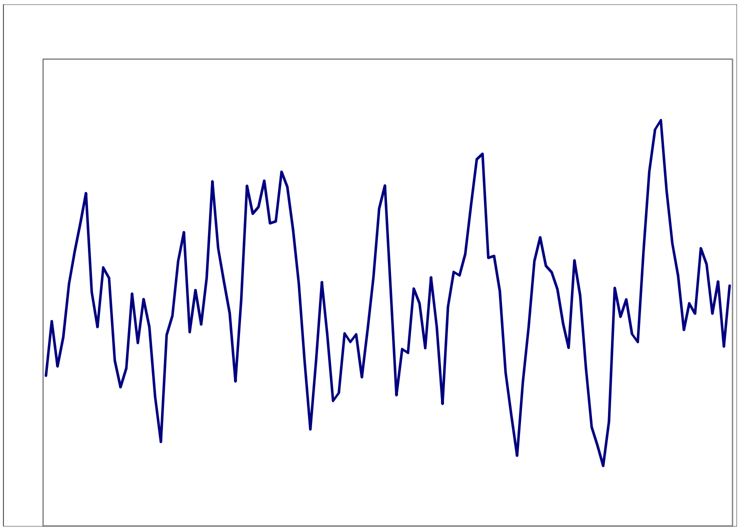


(d) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}

Remarques:

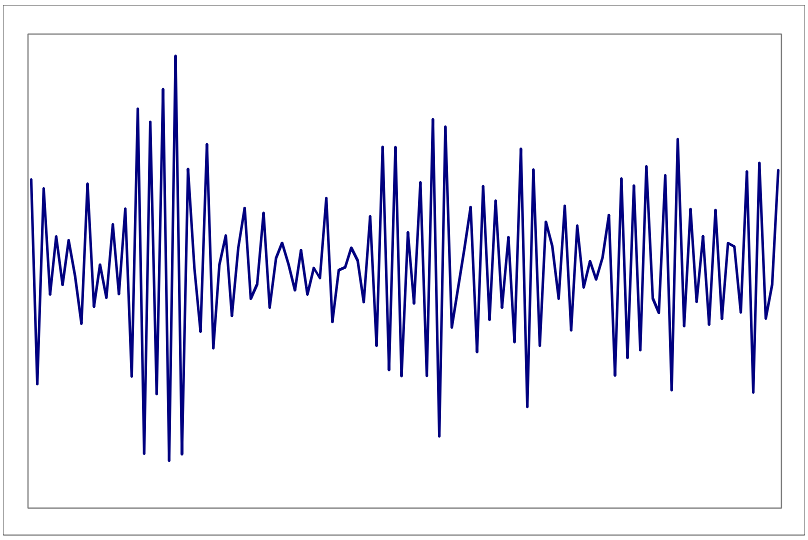
- Les coefficients d'auto-corrélations décroisent toujours en valeur absolue en tenant comme condition initiale R_1.
- Rappelons que dans les modèles AR(1), il y avait aussi une décroissance exponentielle mais la condition initiale était R_0.
- Dans quelques modèles, comme les cas (a) et (b), la partie des moyennes mobiles atténue considérablement la condition initiale à partir de laquelle commence la décroissance exponentielle.

- Dans les figures suivantes, on représente une réalisation correspondante à chacun des quatre modèles.



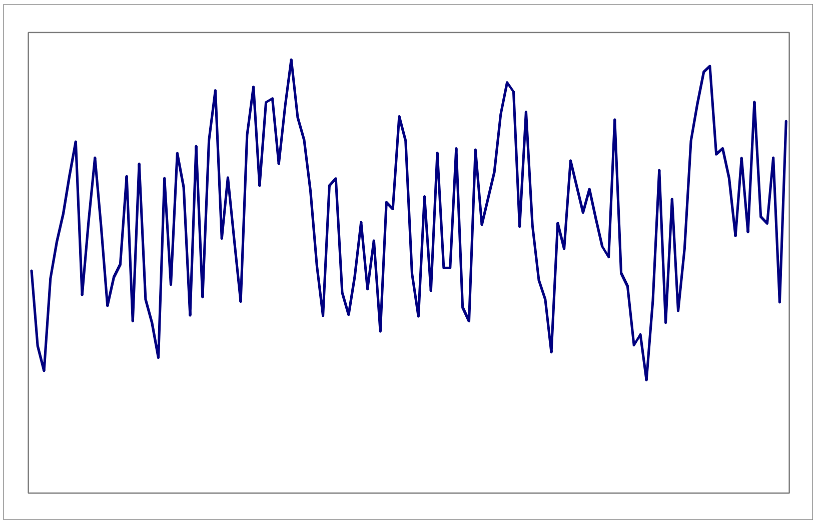
(a) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t+0,5ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120



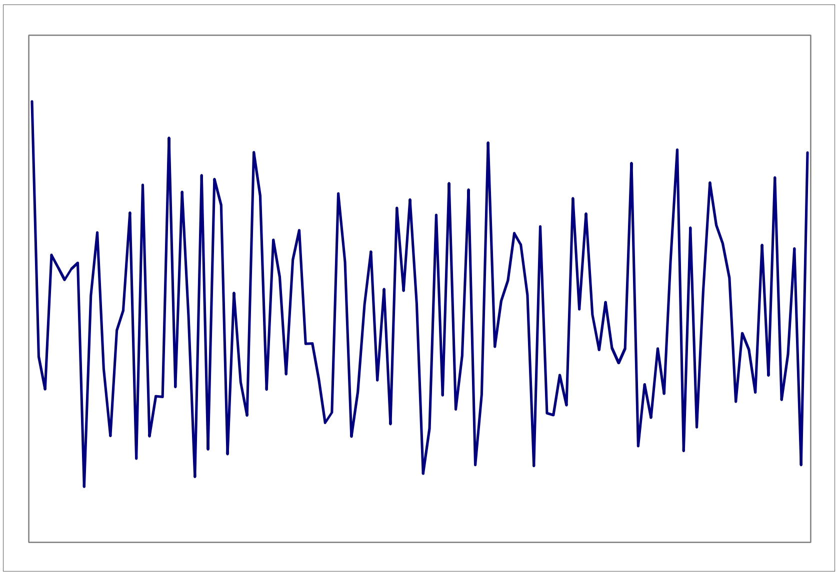
(b) Y_t+0,8Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120



(c) Y_t-0,8Y_{t-1}=ε_t-0,5ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120



(d) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120