Chapitre 2: **Modèles linéaires (de Box-Jenkins)**

Prof. Mohamed El Merouani
Département de Statistique et Informatique
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Université Abdelmalek Essaâdi
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

Exercices

Ex. 1:

Soit le modèle AR(1) suivant:

$Y_t=0,8Y_{t-1}+\varepsilon_t$

$\sigma_\varepsilon^2=2$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2,\ldots, R_5$.
5) Calculer les coefficients $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_5$ du modèle MA(∞) en lequel, c'est si possible, peut se transformer le modèle AR(1) donné.

Ex. 2:

Soit le modèle MA(1) suivant:

$Y_t = \varepsilon_t - 0{,}9\varepsilon_{t-1}$

$\sigma_\varepsilon^2 = 4$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.
5) Calculer les coefficients $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_5$ correspondants au modèle inverti AR(∞).

Ex. 3:

Soit le modèle AR(2) suivant:

$Y_t = 0{,}6Y_{t-1} + 0{,}3Y_{t-2} + \varepsilon_t$

$\sigma_\varepsilon^2 = 3$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Ex. 4:

Soit le modèle MA(2) suivant:

$Y_t = \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1} + 1,2\varepsilon_{t-2}$

$\sigma_\varepsilon^2 = 2$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Ex. 5:

Soit le modèle ARMA(1,1) suivant:

$Y_t = 0,9Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0,8\,\varepsilon_{t-1}$

$\sigma_\varepsilon^2 = 5$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Ex. 6:

Soit le modèle ARIMA (0,1,1) suivant:

$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t - \mathbf{0{,}09}\ \varepsilon_{t-1}$

On demande de:

1) Exprimer l'équation antérieure comme un modèle AR(∞).
2) On notant π_i les coefficients du modèle AR(∞), démontrer que $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$
   Cette démonstration est-elle valable pour tous les modèles ARIMA(0,1,1)?

Corrigés de l'exercice 1

1. Il est stationnaire puisque $|\Phi_1| = |0{,}8| < 1$
2. Par définition, tout AR d'ordre fini est inversible.
3. Calcul de $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_5$.
   Comme $|\Phi_1| < 1$, on a

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \Phi_1^2} = 5{,}5$$

Les autres auto-covariances s'obtiennent de forme récursive par l'équation

$$\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1}$$

Et en prenant γ_0 comme valeur initiale

$$\gamma_1 = \Phi_1 \gamma_0 = 4{,}4$$
$$\gamma_2 = 3{,}52$$
$$\gamma_3 = 2{,}82$$
$$\gamma_4 = 2{,}25$$
$$\gamma_5 = 1{,}80$$

4. Les coefficients d'auto-corrélation s'obtiennent directement de forme récursive de la formule

$$R_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}$$

ou de $R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1}$ en prenant R_0=1 comme valeur initiale

$$R_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{4{,}4}{5{,}5} = 0{,}8$$

$$R_1 = \Phi_1 R_0 = 0{,}8$$

Pour les autres valeurs, on trouve:

R_2=0,640

R_3=0,512

R_4=0,410

R_5=0,328

4. Par la formule $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j}$

on a ψ_1=Φ_1=0,800

$$\psi_2 = \Phi_1^2 = 0{,}640$$

$$\psi_3 = \Phi_1^3 = 0{,}512$$

$\psi_4 = \Phi_1^4 = 0{,}410$ et $\psi_5 = \Phi_1^5 = 0{,}328$

Corrigés de l'exercice 2

1. Il est stationnaire puisque tous les modèles MA d'ordre fini le sont.
2. Il est inversible puisque $|\theta_1|=|0{,}9|<1$
3. Calcul de $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_5$.

On a

$$\gamma_0 = \left[1+\theta_1^2\right]\sigma_\varepsilon^2 = \left[1+(0{,}9)^2\right]\times 4 = 7{,}24$$

$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 = -0{,}9\times 4 = -3{,}6$$

$$\gamma_\tau = 0 \ ; \quad \tau = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

4. $$R_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = -0{,}497$$

et $$R_\tau = 0 \quad ; \quad \tau = 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

5. Comme $|\theta_1|<1$, on a:

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \ldots$$

d'où
$$\pi_1 = \theta_1 = 0{,}900$$
$$\pi_2 = \theta_1^2 = 0{,}810$$
$$\pi_3 = \theta_1^3 = 0{,}729$$
$\pi_4 = \theta_1^4 = 0{,}656$ et $\pi_5 = \theta_1^5 = 0{,}590$

Corrigés de l'exercice 3

1. Pour qu'un modèle AR(2) soit stationnaire, les racines de l'équation caractéristique doivent être inférieures à 1 en valeur absolue.

   Ou, alternativement, si on utilise le polynôme caractéristique, les racines doivent être, en valeur absolue, supérieures à 1, c'est-à-dire elles doivent être situées en dehors du cercle unité.

- En utilisant l'équation caractéristique:

$$\lambda^2 - 0{,}6\lambda - 0{,}3 = 0$$

le discriminant de cette équation de second degré est $\Delta = (-0{,}6)^2 + 4 \text{x} 0{,}3 = 1{,}56 > 0$

elle admet, donc, deux racines réelles distinctes, qui sont

$$\lambda_1 = \frac{0{,}6 + \sqrt{1{,}56}}{2} = 0{,}92$$

$$\lambda_2 = \frac{0{,}6 - \sqrt{1{,}56}}{2} = -0{,}325$$

- Comme $|\lambda_1| = |0{,}92| < 1$ et $|\lambda_2| = |-0{,}32| < 1$, le processus, en question, est stationnaire.
- Alternativement, en utilisant le polynôme caractéristique $1 - 0{,}6L - 0{,}3L^2 = 0$

le discriminant de cette équation de second degré est $\Delta = (0{,}6)^2 + 4 \text{x} 0{,}3 = 1{,}56 > 0$

elle admet, donc, deux racines réelles distinctes, qui sont

$$L_1 = \frac{0{,}6 - 1{,}25}{-2 \times 0{,}3} = 1{,}08$$

$$L_2 = \frac{0{,}6 + 1{,}25}{-2 \times 0{,}3} = -3{,}08$$

- Comme $|L_1|>1$ et $|L_2|>1$ (situées en dehors du cercle unité), le processus est stationnaire.
- On peut vérifier facilement que

$$\lambda_1 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{1{,}08} = 0{,}92$$

et

$$\lambda_2 = \frac{1}{L_2} = \frac{1}{-3{,}08} = -0{,}32$$

2. Par définition, tout processus AR fini est inversible.

3. Pour calculer γ_0, on tient compte de la relation $\gamma_0 = \Phi_1\gamma_1 + \Phi_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$

   D'autre part, en donnant à τ les valeurs 1 et 2, dans la formule $\gamma_\tau = \Phi_1\gamma_{\tau-1} + \Phi_2\gamma_{\tau-2}$; $\tau>0$

   on obtient

$$\begin{cases} \gamma_1 = \Phi_1\gamma_0 + \Phi_2\gamma_1 \\ \gamma_2 = \Phi_1\gamma_1 + \Phi_2\gamma_0 \end{cases}$$

   En résolvant, ce système, pour γ_1 et γ_2, on obtient

$$\gamma_1 = \frac{\Phi_1}{1-\Phi_2}\gamma_0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2 - \Phi_2^2}{1-\Phi_2}\gamma_0$$

- Si on substitue ces valeurs dans la relation

$$\gamma_0 = \Phi_1\gamma_1 + \Phi_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

On obtient

$$\gamma_0 = \frac{1-\Phi_2}{(1+\Phi_2)[(1-\Phi_2)^2-\Phi_1]}\sigma_\varepsilon^2 = 12,42$$

où Φ_1=0,6 et Φ_2=0,3. Par conséquent,

$$\gamma_1 = \frac{\Phi_1}{1-\Phi_2}\gamma_0 = 10,64$$

- Une fois que l'on a déterminé γ_0 et γ_1, les valeurs restantes peuvent être obtenues d'une forme récursive de la formule $\gamma_\tau = \Phi_1\gamma_{\tau-1} + \Phi_2\gamma_{\tau-2}$

On trouve

$$\gamma_2 = \Phi_1\gamma_1 + \Phi_2\gamma_0 = 10,11$$

$$\gamma_3 = \Phi_1\gamma_2 + \Phi_2\gamma_1 = 9,26$$

$$\gamma_4 = \Phi_1\gamma_3 + \Phi_2\gamma_2 = 8,59$$

$$\gamma_5 = \Phi_1\gamma_4 + \Phi_2\gamma_3 = 7,93$$

4. Comme, on a déjà trouvé γ_τ, pour calculer R_τ, on utilise la relation
$$R_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}$$
et on obtient les résultats suivants:

R_1=0,86; R_2=0,81; R_3=0,75; R_4=0,69 et R_5=0,64.

- Alternativement, on peut faire
$$R_1 = \frac{\Phi_1}{1-\Phi_2} = 0{,}86$$
En prenant R_0=1 et R_1=0,86 comme valeurs initiales, les autres valeurs peuvent être trouvées de forme récursives à partir de la formule $R_{\tau =} \Phi_1 R_{\tau\text{-}1 +} \Phi_2 R_{\tau\text{-}2}$; τ=2, 3, 4, 5, …

Corrigés de l'exercice 4

- $Y_t = \varepsilon_t\text{-}0{,}4\varepsilon_{t\text{-}1} + \cancel{1{,}2}\varepsilon_{t\text{-}2}$
- σ_ε^2=2 −0,5 ➡ $Y_t = \varepsilon_t - 0{,}4\varepsilon_{t\text{-}1} - 0{,}5\varepsilon_{t\text{-}2}$

1) Par définition, tout processus MA d'ordre fini est stationnaire.
2) Pour vérifier si les conditions d'inversibilité sont satisfaites, on calcule les racines de l'équation caractéristiques $\lambda^2 - 0{,}4\lambda - 0{,}5 = 0$

- Son discriminant est $\Delta = (-0{,}4)^2 - 4\text{x}(-0{,}5) = 2{,}16 > 0$

- Elle admet, donc, deux racines réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{0{,}4+1{,}47}{2} = 0{,}935$$

$$\lambda_2 = \frac{0{,}4-1{,}47}{2} = -0{,}535$$

Comme $|\lambda_1|<1$ et $|\lambda_2|<1$, alors le processus MA(2) considéré est inversible.

- Une autre alternative est d'utiliser le polynôme caractéristique $1-0{,}4L-0{,}5L^2=0$

- Son discriminant est $\Delta=(-0{,}4)^2-4\text{x}(-0{,}5)=2{,}16>0$
- Il admet, donc, deux racines réelles distinctes

$$L_1 = \frac{0{,}4-\sqrt{2{,}16}}{2\times(-0{,}5)} = 1{,}07$$

$$L_2 = \frac{0{,}4+\sqrt{2{,}16}}{2\times(-0{,}5)} = -1{,}87$$

- Comme $|L_1|>1$ et $|L_2|>1$, alors le processus MA(2) considéré est inversible.

- On peut voir facilement que

$$\lambda_1 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{1{,}07} = 0{,}93 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{L_2} = \frac{1}{-1{,}87} = -0{,}535$$

3. Pour calculer $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_5$, on utilise les relations

$$\begin{cases} \gamma_0 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = \left(-\theta_1 + \theta_1\theta_2\right)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_2 = \left(-\theta_1\right)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_\tau = 0 \; ; \; \tau = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

On trouve: γ_0=2,82 γ_1=−0,4 et γ_2=−0,8.

4) A partir de la variance et des auto-covariances, le calcul des auto-corrélations est immédiat

$$R_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = -0{,}14$$

$$R_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = -0{,}28$$

$$R_\tau = 0 \; ; \quad \tau = 3, 4, 5, \ldots$$

Corrigés de l'exercice 5

1. Ce processus est stationnaire puisque $|\Phi_1|=|0,9|<1$.
2. Par analogie, puisque $|\theta_1|=|0,8|<1$, le processus est inversible.
3. En utilisant la relation

$$\gamma_0 = \frac{1-2\theta_1\Phi_1+\theta_1^2}{1-\Phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2 = 5{,}26$$

- En utilisant les relations $\gamma_1 = \Phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2$

et $\gamma_\tau = \Phi_1\gamma_{\tau-1}$; $\tau = 2,3,4,5,\dots$

on trouve γ_1=0,73 ; γ_2=0,66 ; γ_3=0,59 ;
γ_4=0,53 ; γ_5=0,48

4. La suite des coefficients des auto-corrélations s'obtient immédiatement

R_1=0,14 ; R_2=0,13 ; R_3=0,11

R_4=0,10 ; R_5=0,09

Corrigés de l’exercice 6

1. Un modèle ARIMA(0,1,1) peut être exprimé ainsi: $Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{(1-\theta_1 L)}(Y_t - Y_{t-1}) =$$

$$= (Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \ldots) - (Y_{t-1} + \theta_1 Y_{t-2} + \theta_1^2 Y_{t-3} + \ldots)$$

$$= Y_t - (1-\theta_1)Y_{t-1} - (1-\theta_1)\theta_1 Y_{t-2} - (1-\theta_1)\theta_1^2 Y_{t-3} - \ldots$$

En tenant compte que **θ_1=0,09** le modèle s’exprime alors,

$$Y_t = 0{,}91 Y_{t-1} + 0{,}082 Y_{t-2} + 0{,}007 Y_{t-3} + \ldots + \varepsilon_t$$

4. L’expression théorique d’un AR(∞) serait comme suit: $Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \pi_3 Y_{t-3} + \ldots + \varepsilon_t$

En identifiant chaque π_i avec son correspondant obtenu dans la question précédente, on obtient,

$$\pi_1 = (1-\theta_1)$$
$$\pi_2 = (1-\theta_1)\theta_1$$
$$\pi_3 = (1-\theta_1)\theta_1^2$$
$$\ldots\ldots$$

- Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = (1-\theta_1)\sum_{i=1}^{\infty} \theta_1^i = (1-\theta_1)\frac{1}{1-\theta_1} = 1$$

- Donc, la somme $\sum \pi_i = 1$ est vraie, quelque soit la valeur de θ_1 et chaque fois que le modèle est inversible. ($|\theta_1|<1$)

Références:

- Ezequiel URIEL JIMÉNEZ:«Análisis de series temporales. Modelos ARIMA», Collection ábaco, editorial PARANINFO, Madrid, 1995.
- Régis BOURBONNAIS, Michel TERRAZA: «Analyse des séries temporelles: Applications à l'économie et à la gestion», DUNOD, 2004.
- Sandrine LARDIC, Valérie MIGNON: «Économétrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières», Economica, 2002.