Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques,
Economiques et Sociales de Tétouan

Master de Recherche : Finance Islamique

Module: Méthodes d'Optimisation

Prof. Mohamed El Merouani
e-mail: m_merouani@yahoo.fr
http://elmerouani.jimdo.com

1

Plan

- Modélisation
- Méthode Graphique
- Algorithme du Simplexe
- Méthode des deux phases
- Dualité
- Analyse de Sensibilité

2

Bibliographie

- **M. El Merouani: «Gestion des Opérations », Al khalij Al arabi, Tétouan, 2009.**
- C. Guéret, C. Prins, M. Sevaux, Programmation linéaire, Eyrolles, 2000.
- R. Favre, B. Lemaire, C. Picouleau, Précis de recherche opérationnelle, Dunod, 2000.
- Y. Nobert, R. Ouellet, R. Parent, La recherche opérationnelle, Gaétan Morin,1995.
- J. F. Phélizon, Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, Economica,1998.
- M. Aidene, B. Oukacha. Recherche opérationnelle. Programmation linéaire. Edition Pages Bleues.208p.2005.

3

Bibliographie

- G.B. Dantzig, M.N. Thapa, Linear programming, Springer, 1997.
- G. Sierksma, Linear and integer programming, Marcel Dekker, 2001.
- R.J. Vanderbei, Linear programming foundations and extensions, Kluwer, 2001.
- DANTZIG G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton, Princeton University Press, 1963.

4

Introduction

- Les modèles d'optimisation jouent un rôle de plus en plus important dans les problèmes de décision financière.
- Beaucoup de problèmes de la Finance qui s'étendent de l'allocation d'actifs à la gestion des risques, de l'évaluation d'options au modèle d'ajustement et de calibrage peuvent être résolus efficacement en utilisant des techniques modernes d'optimisation.

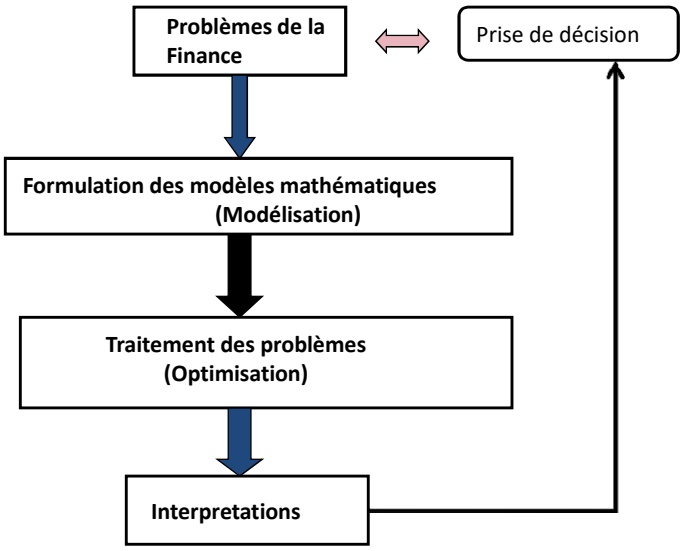
5

Introduction

- L'optimisation est une branche des mathématiques appliquées qui tirent son importance à partir de la grande variété de ses applications et à partir de la disponibilité d'algorithmes efficients.
- Mathématiquement, il se réfère à la minimisation (ou Maximisation) d'une fonction objectif donnée de plusieurs variables de décision qui satisfont des contraintes fonctionnelles.
- Un modèle d'optimisation typique aborde l'attribution(allocation) de ressources rares parmi des utilisations alternatives possibles pour maximiser une fonction objectif comme le profit total.

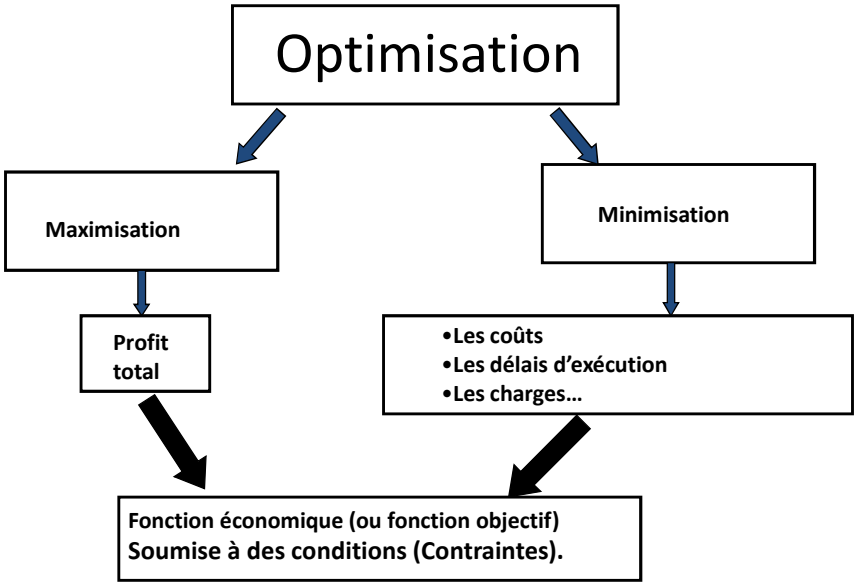
6

Introduction

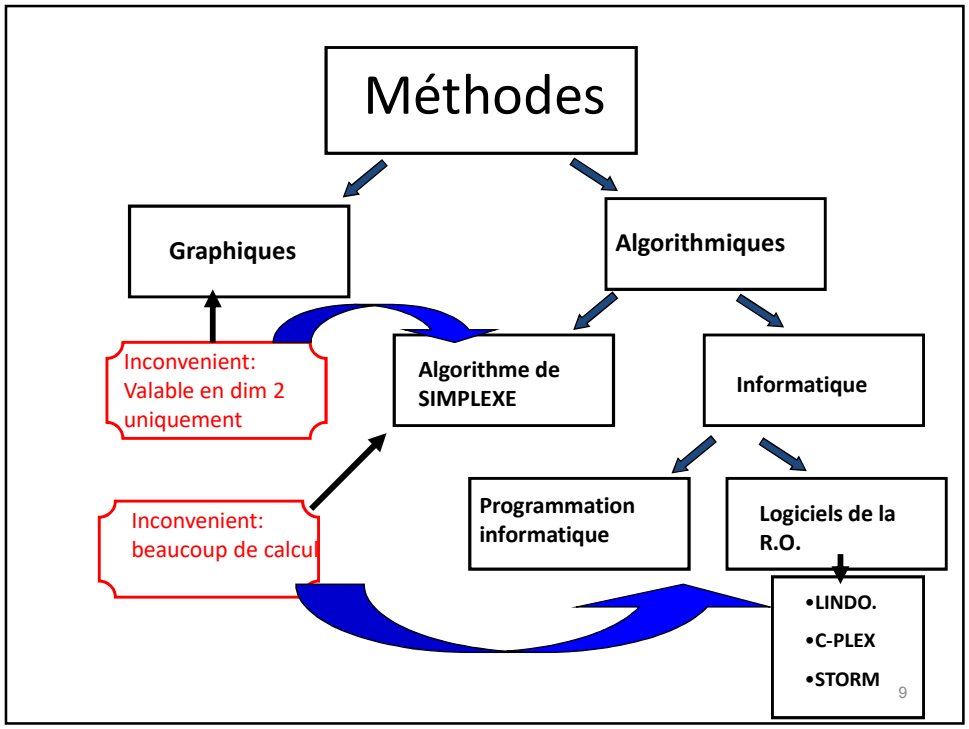


7

Optimisation



8



Chapitre 1:

Modélisation Mathématique

10

elmerouani.jimdo.com

Modélisation

- Avant de résoudre un problème de la gestion, il faut bien commencer par sa traduction par des relations mathématiques.
- Le fait de traduire (de formuler) les problèmes de l'entreprise par des relations mathématiques s'appelle "La Modélisation".

11

Modélisation

- Alors les relations mathématiques obtenues ne constitue que des "Modèles" des problèmes considérés.
- Connaître une solution optimale des modèles permet souvent de prendre des décisions adéquates.

12

Modélisation

La recherche du modèle mathématique d'un problème revient à identifier certains composantes relatives à ce problème:

1. L'ensemble des actions (activités ou variables) qui s'offrent à l'agent de décision,
2. Les contraintes définissent la nature du système à étudier,
3. L'objectif visé exprimé sous forme d'une fonction mathématique (fonction objectif ou fonction économique)

13

elmerouani.jimdo.com

Forme d'un modèle

- Un modèle ou un programme mathématique est un problème d'optimisation de la forme:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujet à } f_i(x) \leq 0 \quad i=1,\ldots,m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ou

$$(P') \quad \begin{cases} \text{Max } f(x) \\ \text{sujet à } f_i(x) \leq 0 \quad i=1,\ldots,m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

14

Forme d'un modèle

- La fonction f est appelée la fonction objectif ou fonction économique .
- Les conditions $f_i(x) \leq 0 \quad i=1,\ldots,m$ sont appelées les contraintes de (P).
- Dans toute la suite, nous ne considérons que le problème (P);

  en effet, Max $f(x) = -\text{Min}(-f)(x)$,

  donc résoudre (P') revient à résoudre (P).

15

elmerouani.jimdo.com

Exemple 1: Problème de financement

- Une corporation veut financer un projet à court-terme, et doit lever des fonds (1000 DH)

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Cash-flow net	-150	-100	200	-200	50	300

- Les sources de financement possibles sont:
  - **un crédit** de maximum 100DH à 1% d'intérêt par mois;
  - **un billet de trésorerie** valable pendant 3 mois à 2% d'intérêt pour les 3 mois;
  - **L'excédent mensuel** peut-être investi à 0,3% par mois.

16

Exemple 1: Modélisation du problème de financement

- Notre objectif est d'avoir une fortune maximale au mois de juin, en respectant toutes les contraintes de payement.

Définition (notation) des variables de décision:

- x_i montant du crédit au mois i.
- y_i montant du billet de trésorerie émis en i.
- z_i excédent mensuel au mois i.
- F la fortune de la firme au mois de juin.

17

elmerouani.jimdo.com

Exemple 1: Modélisation du problème de financement

- En janvier (i=1), il y a une exigence de liquide de 150 DH.
- Pour satisfaire à cette exigence, l'entreprise peut tirer un montant x_1 de sa ligne de crédit et produire un montant y_1 de billets de trésorerie.
- En considération la possibilité de fonds d'excès z_1 (peut-être nul), l'équation d'équilibre de cash-flow d'autofinancements est comme suit:

$$x_1+y_1-z_1=150$$

18

Exemple 1: Modélisation du problème de financement

- Puis, en février (i=2), il y a une exigence de liquide de 100 DH.
- En plus, il y a un intérêt principal majoré de $1{,}01x_1$ qui est dû sur la ligne de crédit et $1{,}003z_1$ est reçu sur les fonds d'excès investis.
- Pour satisfaire à l'exigence en février, l'entreprise peut tirer un montant x_2 à partir de sa ligne de crédit et produire un montant y_2 de billets de trésorerie.
- Ainsi, l'équation d'équilibre de cash-flow pour le mois de février est la suivante:

$$x_2+y_2-1{,}01x_1+1{,}003z_1-z_2=100$$

19

Exemple 1: Modélisation du problème de financement

De même, pour mars, avril, mai et juin, nous obtenons les équations suivantes:

$$x_3 + y_3 - 1{,}01\, x_2 + 1{,}003\, z_2 - z_3 = -200$$
$$x_4 - 1{,}02\, y_1 - 1{,}01\, x_3 + 1{,}003\, z_3 - z_4 = 200$$
$$x_5 - 1{,}02\, y_2 - 1{,}01\, x_4 + 1{,}003\, z_4 - z_5 = -50$$
$$-1{,}02\, y_3 - 1{,}01\, x_5 + 1{,}003\, z_5 - F = -300$$

D'où le modèle linéaire de ce problème s'écrit:

20

Exemple 1: Modélisation du problème de financement

Max F

$$
s.à. \begin{cases}
x_1 + y_1 - z_1 = 150 \\
x_2 + y_2 - 1.01\, x_1 + 1.003\, z_1 - z_2 = 100 \\
x_3 + y_3 - 1.01\, x_2 + 1.003\, z_2 - z_3 = -200 \\
x_4 - 1.02\, y_1 - 1.01\, x_3 + 1.003\, z_3 - z_4 = 200 \\
x_5 - 1.02\, y_2 - 1.01\, x_4 + 1.003\, z_4 - z_5 = -50 \\
-1.02\, y_3 - 1.01\, x_5 + 1.003\, z_5 - F = -300 \\
x_1, \ldots, x_5 \leq 100\,; \quad x_i\,, y_i\,, z_i \geq 0.
\end{cases}
$$

21

Exemple 1: Modélisation du problème de financement

Max $F = 300 - 1{,}02\, y_3 - 1{,}01\, x_5 + 1{,}003\, z_5$

$$
s.à. \begin{cases}
x_1 + y_1 - z_1 = 150 \\
x_2 + y_2 - 1{,}01\, x_1 + 1{,}003\, z_1 - z_2 = 100 \\
x_3 + y_3 - 1{,}01\, x_2 + 1{,}003\, z_2 - z_3 = -200 \\
x_4 - 1{,}02\, y_1 - 1{,}01\, x_3 + 1{,}003\, z_3 - z_4 = 200 \\
x_5 - 1{,}02\, y_2 - 1{,}01\, x_4 + 1{,}003\, z_4 - z_5 = -50 \\
x_1, \ldots, x_5 \leq 100\,; x_i\,, y_i\,, z_i \geq 0.
\end{cases}
$$

22

Exemple 2: Problème d'investissement

- Considérons le problème d'investissement suivant sur T années, où l'objectif est de maximiser la valeur des investissements dans l'année T. Nous supposons un marché des capitaux parfait avec le même prêt annuel et un taux d'emprunt r>0 chaque année. Nous supposons aussi que les fonds d'investissement exogènes b_t sont disponibles pour chaque année t, avec $t=1,\ldots,T$.

23

Exemple 2: Problème d'investissement

- Soit n le nombre d'investissement possibles. Nous supposons que chaque investissement est compris comme fraction entre 0 et 1.
- Soit a_{tj} le cash-flow associé avec l'investissement j à l'année t. Soit c_j la valeur d'investissement j à l'année t (incluant tous les fonds ultérieurs à l'année T escompté aux taux d'intérêt r).

24

Exemple 2: Modélisation du problème d'investissement

- Le programme linéaire qui maximise la valeur des investissements dans l'année T est le suivant:
- On dénote par x_j la fraction de l'investissement j entrepris, et soit y_t la quantité (le montant) emprunté (s'il est négatif) ou prêté (s'il est positif) durant l'année t.

25

Exemple 2: Modélisation du problème d'investissement

$$Max\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + y_T$$

$$s.à. \begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + y_1 \leq b_1 \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - (1+r) y_{t-1} + y_t \leq b_t \,; \quad pour\ t = 2,\ldots,\ T \\ 0 \leq x_j \leq 1 \,; \quad pour\ \ j = 1,\ldots,\ n \end{cases}$$

26

Exemple 3: Problème de manager de portefeuille

- Un manager de portefeuille d'obligations dispose de 1000,000 $ pour les allouer en deux différentes obligations; une obligation de société et une obligation d'État.
- L'obligation de société a un rendement de 4%, une maturité de 3 ans et une évaluation numérique de 2 (pour des buts informatiques).
- Au contraire l'obligation d'État a un rendement de 3%, une maturité de 4 ans et une évaluation numérique correspondante à 1 (les évaluations numériques basses correspondent aux obligations de qualité plus haute).

27

Exemple 3: Problème de manager de portefeuille (suite):

- Le manager de portefeuille voudrait allouer ses fonds pour que l'évaluation moyenne de portefeuille ne soit pas plus mauvaise qu'au équivalent numérique 1,5 et la maturité moyenne du portefeuille est au plus de 3,6 ans.
- N'importe quelle quantité (montant) non investie dans les deux obligations sera gardée dans un compte de caisse qui est supposé pour ne gagner aucun intérêt pour simplifier et ne contribue pas à l'évaluation de moyenne ou les calculs de maturité.
- Comment le manager devrait-il allouer ses fonds entre ces deux obligations pour réaliser son objectif de maximiser le rendement de ces investissements?

28

Exemple 3: Le modèle

- Soient deux variables x_1 et x_2 dénotant l'attribution des fonds à l'obligation de société et à l'obligation d'État respectivement en milliers de dollars,
- Soit R, le rendement de ces investissements
- Nous obtenons la formulation suivante pour le problème de manager de portefeuille:

29

Exemple 3: Le modèle

$$Max \quad R = 4x_1 + 3x_2 \quad \text{(rendement)}$$

$$s.à. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 & \text{(pourcentage)} \\ \dfrac{2x_1 + x_2}{100} \leq 1,5 & \text{(évaluation)} \\ \dfrac{3x_1 + 4x_2}{100} \leq 3,6 & \text{(maturité)} \\ x_1 ; x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

30

Exemple 3: Le modèle

- D'abord, nous multiplions, la 2ème et la 3ème contrainte par 100 pour éviter les fractions, après **nous ajoutons des variables d'écart** à chacune des contraintes **et nous multiplions la fonction objective par (-1) pour transformer la maximisation en minimisation** pour obtenir une représentation standard du modèle:

31

Exemple 3: Le modèle

$$Min\ \ Z = -4x_1 - 3x_2$$

$$s.à.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 360 \\ x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

32

Exercices

M. El Merouani: «Gestion des Opérations », Al khalij Al arabi, Tétouan, 2009.

De la page 16 à la page 22

33