Université Abdelamalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2017/2018
S.M.A. Semestre 6
T.D. de Probabilités 2

Série n°3

Exercice 1:

Soit X une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On considère la v.a. $Y=n-X$.

1°) Montrer que la v.a. Y suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.

2°) Montrer que le rapport $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}$ vaut $\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$ et recalculer $P(X=k)$ par récurrence.

3°) On lance six dés. Soit X la v.a. qui correspond au nombre «5» obtenu. Dresser le tableau de répartition de la v.a. X.

Exercice 2:

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire simultanément de cette urne 4 boules. Soit la v.a. X égale au nombre de boules blanches tirées. Donner la loi de la v.a. X.

Exercice 3:

Soit X une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que : $k.P(X=k)=\lambda.P(X=k-1)$

Recalculer la valeur de $P(X=k)$ par récurrence.

Exercice 4:

Soit une fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x^k); & 0\le x<1 \\ 0\,; & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $k\in IN^*$ et $c\in IR$.

1°) Pour quelles valeurs de c et k, la fonction f est une densité de probabilité ?

2°) Que vaut $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$ pour $k=2$?

Exercice 5:

Soit la v.a. absolument continue X dont la densité de probabilité est $f(x)=\begin{cases} \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}\ ; & 0\le x<1 \\ 0\ ; & \text{sinon} \end{cases}$

Où $k\in IR$.

1°) Trouver la valeur de k.

2°) Tracer le graphe de f ainsi que celui de F.

Exercice 6:

Soit X une v.a. de densité de probabilité $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\ ; & si\ \ x\in[-1,1] \\ 0; & si\ \ x\notin[-1,1] \end{cases}$

1°) Soit $Y=-2X+1$. Montrer que Y est une v.a. et déterminer la densité de probabilité de Y.

2°) Soit $Z=X^2$. Déterminer la densité de probabilité de Z.

Exercice 7:

Soit une v.a. X suivant une loi normale centrée réduite N(0,1). On considère la v. a. $Y=X^2$.

1°) Déterminer la fonction de répartition $F_Y(y)$ de Y.

2°) En déduire la fonction de densité $f_Y(y)$ de Y.

Exercice 8:

Soit une v.a. X suivant une loi Uniforme $U(0,\frac{\pi}{2})$. On considère la v. a. $Y=\sin X$.

1°) Déterminer la fonction de répartition $F_Y(y)$ de Y.

2°) En déduire la fonction de densité $f_Y(y)$ de Y.

Exercice 9:

On dit qu'une v.a. Y suit une loi Log-normale avec paramètres μ et σ, et on note Y~LN(μ,σ), si la v.a. X=Log Y suit une loi normale N((μ,σ).

1°) Déterminer la fonction de densité $f_Y(y)$ de Y.

2°) Exprimer la fonction de répartition $F_Y(y)$ de Y en terme de la fonction de répartition d'une v.a. normale centrée réduite N(0,1).

Exercice 10:

Soient deux réels *a*>0 et α>0. Soit *f* la fonction définie sur *IR*+ par : pour tout *x*Є*IR*+,

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x & si\ \ 0\le x<\dfrac{a}{2}\\ \alpha(a-x) & si\ \dfrac{a}{2}\le x<a\\ 0 & si\ \ x\ge a\end{cases}$$

1°) Calculer la constante α pour que *f* soit une densité de probabilité. On choisit dorénavant cette valeur pour α.

2°) Soient *X* une variable aléatoire de densité *f* et un réel $b\in\left]0,\dfrac{a}{2}\right[$; calculer les probabilités $P\left(X>\dfrac{a}{2}\right)$ et $P\left(\dfrac{a}{2}-b<X\le\dfrac{a}{2}+b\right)$.

3°) Démontrer que pour tout $b\in\left]0,\dfrac{a}{2}\right[$, les événements $A=\left(X>\dfrac{a}{2}\right)$ et $B=\left(\dfrac{a}{2}-b<X\le\dfrac{a}{2}+b\right)$ sont indépendants.

Exercice 11 :

On considère les deux fonctions *F* et *H* données par :

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{e^{-x}}{2} & si\ \ x\ge 0\\ 0 & si\ x<0\end{cases}\qquad \textbf{et}\qquad H(y)=\begin{cases}1 & si\ \ y>0\\ 0 & si\ \ y\le 0\end{cases}.$$

Ces fonctions peuvent-elles être des fonctions de répartition de variables aléatoires *X* et *Y*, respectivement ?

Exercice 12:

La densité d'une variable aléatoire continue *X* est *f*. Trouver la densité *h* de la variable aléatoire *Y*=*aX*+*b*, où *a*≠0 et *b* ne sont pas aléatoires.

Exercice 13:

Soit *X* une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ \dfrac{1}{a} & si\ \ 0<x\le a\\ 0 & si\ \ x>a\end{cases}$$

Donner les lois de probabilités des variables aléatoires : $Y=X^2$; $Z=\sqrt{X}$.