Université Abdelmalek Essaâdi | Année Universitaire : 2018-2019

Faculté des Sciences de Tétouan | S.M.A. (Semestre 6)

Département de Mathématiques | T.D. de Probabilités 2

Série n°1

Exercice 1 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Montrer que :

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.
3. Si $A\in\mathscr{A}$ et $B\in\mathscr{A}$, alors $A-B \in\mathscr{A}$ et $A\Delta B\in\mathscr{A}$.

Exercice 2 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B des événements de $\mathscr{A}$ et $(A_n)_{n\in IN}$, une suite d'événements de $\mathscr{A}$. Montrer que

i. $A \subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

ii. $P(A^c)=1-P(A)$

iii. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

iv. Si $(A_n)_n$ est une suite croissante, ou décroissante, d'événements alors $P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$

v. $P\left(\bigcup\limits_{n\in IN} A_n\right) \leq \sum\limits_{n\in IN} P(A_n)$

vi. Pour tout $n\in IN$, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

(Inégalité de Bonferroni)

Exercice 3 :

Soient A et B des événements de $\mathscr{A}$.

Montrer que : $P(A\cap B)\geq 1-P(A^c)-P(B^c)$ (Inégalité de Boole).

Exercice 4 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Montrer que X^2 et $\frac{1}{X}$ si $\{X=0\}=\emptyset$ sont aussi des variables aléatoires. Soient maintenant a et b deux constantes réelles. Monter que $aX+b$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Soit F la fonction de répartition de X. Calculer les fonctions de répartitions de $|X|$ et de $aX+b$.