Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année: 2018-2019
S.M.A.
Semestre 6

Probabilités 2

Prof. Mohamed El Merouani
https://elmerouani.jimdo.com/
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

v.a. continue:

Définition:

Soit une v.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la fonction de répartition est F.

La v.a. X est dite continue si F est continue.

La v.a. X est dite absolument continue s'il existe une fonction **positive** f telle que:

$\forall\ x \in IR;\ F(x)=P(X\leq x)= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

la fonction f est dite fonction de densité de probabilité de X.

Propriétés:

1. $P(a<X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$

2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

3. Si f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 avec $F'(x_0)=f(x_0)$.

Théorème:

Soit X une v.a., alors $P(X=a)=\lim_{t\to a^-} P(t < X \leq a)$
$=F(a)-F(a^-)$

Preuve: Soit $(t_n)_{n\in IN}$ une suite qui croît vers a et soit $A_n=\{t_n<X\leq a\}$; $(A_n)_{n\in IN}$ est décroissante avec $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{X = a\}$.

Donc $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\{X=a\}$ (car $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$)

et puisque $P(t_n<X\leq a)=F(a)-F(t_n)$, on a:

$$\lim_{n\to\infty} P(t_n < X \leq a) = F(a) - \lim_{n\to\infty} F(t_n)$$

$$= F(a) - F(a^-) \quad \square$$

Remarque:

- F est continue en $a \Leftrightarrow P(X=a)=0$
- F admet en a une discontinuité (ou un saut)

$$\Updownarrow$$

$$P(X=a)>0$$

5

Lois d'une fonction d'une v.a.:

<u>Si X est une v.a. discrète:</u>

- Soit X une v.a. discrète telle que $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans un ensemble $E=\{y_1,y_2,\ldots\}$. Alors, $Y=g(X)$ est une v.a. telle que: $\forall j$; $$\left(Y=y_j\right)=\bigcup_{i\in I}\left(X=x_i\right)$$

  où la réunion est prise sur $I=\{i/g(x_i)=y_j\}$

  D'où $$P\left(Y=y_j\right)=\sum_{i\in I}P\left(X=x_i\right)$$

Prof. Mohamed El Merouani 6

Exemple:

- Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité donnée par:

x_i	–2	–1	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3

- Cherchons la loi de $Y=X^2+1$

Exemple:

- Y prend les valeurs 1, 2 et 5 avec les probabilités:
- $P(Y=1)=P(X=0)=0,3$
- $P(Y=2)=P(X=-1)+P(X=1)=0,1+0,2=0,3$
- $P(Y=5)=P(X=-2)+P(X=2)=0,1+0,3=0,4$

D'où la loi de Y:

y_j	1	2	5
$P(Y=y_j)$	0,3	0,3	0,4

Lois d'une fonction d'une v.a.:

Si X est une v.a. continue:

Soit X une v.a. continue de densité f_X et soit $Y=g(X)$ où g est une fonction strictement monotone et dérivable. Alors $Y=g(X)$ est une v.a. continue dont la densité f_Y est donnée par:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| & si \;\; \alpha < y < \beta \\ 0 & autrement \end{cases}$$

avec $\alpha=\min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$ et

$\beta=\max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$ }

9

Preuve:

- Si g est strictement croissante et dérivable alors g est continue, st.↗ (donc g bijective), les limites α et β existent (peuvent être infinies) et la fonction inverse g^{-1} existe, elle est dérivable et st.↗. Donc

$$P\left(Y \le y\right) = P\left(g(X) \le y\right) = P\left(X \le g^{-1}(y)\right)$$

d'où $F_Y(y)=F_X(g^{-1}(y))$

où F_X et F_Y sont respectivement les fonctions de répartition des v.a. X et Y.

Preuve:

En dérivant, on obtient

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}(y)\right)'$$

Si g est st. ↘, nous avons g^{-1} est aussi st. ↘

$$\begin{aligned} P\left(Y \le y\right) &= P\left(g(X) \le y\right) \\ &= P\left(X > g^{-1}(y)\right) \\ &= 1 - P\left(X \le g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

d'où $F_Y(y)=1-F_X(g^{-1}(y))$

En dérivant, on obtient

$$f_Y(y) = -f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}(y)\right)'$$

d'où le résultat.

Exemple:

Soit X une v.a. continue de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Cherchons les densités de:

(a) $Y=e^X$

(b) $Y=-2\,Ln\,X$

Exemple:

(a) $Y = e^X \Leftrightarrow X = Ln\ Y$ avec $Y > 0;\ \forall X$

et on a:

$$f_Y(y) = 1.\left|\frac{1}{y}\right| \ ;\ \ 0 < Ln\, y < 1$$

C'est-à-dire que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & si\ 1 < y < e \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Exemple:

(b) $$f_Y(y) = 1.\left|-\frac{1}{2}e^{-y/2}\right| \ ;\ \ 0 < e^{-y/2} < 1$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-y/2} & si\ \ 0 < y < \infty \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Remarque:

Si g n'est pas bijective ou si g n'est pas strictement monotone, alors on trouve la densité de $Y=g(X)$ par dérivation de $P(Y \leq y)=P(g(X) \leq y)$

Contre-exemple:

Soit X une v.a. continue de densité

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \;;\; -\infty < x < +\infty$$ (Loi normale $N(0,1)$)

Cherchons la densité de $Y=X^2$.

Contre-exemple:

Dans ce cas $g'(x)=2x$ qui est positive pour $x>0$ et négative pour $x<0$, d'où g n'est pas strictement monotone.

Mais, pour $y>0$, on a:

$$F_Y(y)=P\left(Y \leq y\right)=P\left(X^2 \leq y\right)$$

$$=P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right)$$

$$=F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

Contre-exemple:

En dérivant, on obtient

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] & si \quad y > 0 \\ 0 & si \;\; y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} & si \;\; y > 0 \\ 0 & si \quad y \leq 0 \end{cases}$$

17

Moments d'une variable aléatoire

Une v.a. peut être caractérisée par certaines valeurs typiques associées aux notions de valeur central, de dispersion et de forme de la distribution.

On verra dans ce chapitre:

- Espérance mathématique
- Variance et écart-type
- Moments d'ordre supérieurs
- Covariance et corrélation de deux v.a.

Prof. Mohamed El Merouani 18

Espérance mathématique:

Variable aléatoire discrète:

Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité $P(X=x_i)=p_i$, i=1,2,…

Si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$, on définit l'espérance

mathématique de X par $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$

Remarque:

- Lorsque $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ est fini, cette somme est finie et on a:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

- Lorsque $X(\Omega)$ est infini, on a la somme d'une série qui peut ne pas exister.

Exemple:

- Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité définie par:

$$p_i = P\left(X = x_i = (-1)^{i+1} \frac{3^i}{i} \right) = \frac{2}{3^i} \quad \text{pour } i=1,2,3,\ldots$$

Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{i} \cdot \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i} = \infty$

l'espérance mathématique de X n'existe pas.

Espérance mathématique:

Variable aléatoire continue:

Soit X une v.a. continue de densité f telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

On définit l'espérance mathématique de X par

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

Remarque:

Comme pour une v.a. discrète, l'espérance mathématique d'une v.a. continue n'existe pas toujours.

Exemple:

Soit X une v.a. continue de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2};\ x \in \mathbb{R}$$ (Loi de Cauchy)

Puisque l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx$ n'existe pas,

Cette intégrale diverge, alors l'espérance mathématique de X n'existe pas.