Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018-2019
S.M.A. (Semestre 6)
T.D. de Probabilités 2

Série n°2

Exercice 1 :

Soit l'espace probabilisable (IR, $\mathcal{B}(IR)$). On considère la fonction f définie de IR dans IR par :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & si\ x\geq 0\\ 0 & si\ x<0\end{cases}$$ où α est un réel positif non nul.

Pour tout événement $A \in \mathcal{B}(IR)$, on pose $P(A)=\int_A f(x)dx$.

Montrer que P est une mesure de probabilité sur (IR, $\mathcal{B}(IR)$).

Exercice 2 :

On donne la variable aléatoire continue X de densité de probabilité f_X. On considère la variable aléatoire $Y=kX$ avec k est un réel positif non nul. Trouver la fonction de densité f_Y de Y et vérifier que c'est bien une densité de probabilité.

Exercice 3 :

Sur (Ω, $\mathcal{A}$, P) un espace probabilisé, on définit la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ indicatrice d'un événement $A \in \mathcal{A}$, par $\mathbf{1}_A(\omega)=\begin{cases}1 & si\ \omega\in A\\ 0 & si\ \omega\notin A\end{cases}$.

Donner la fonction de répartition de l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A dont la probabilité est égale à p.

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2,\ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2,\ldots, p_n$; et soit un nombre a tel que $x_1\leq a \leq x_n$. On considère la variable aléatoire $Z=\min(X,a)$ représentant le nombre minimal entre les valeurs de la variable aléatoire X et du nombre a. Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

Exercice 5:

On dit qu'une variable aléatoire X est distribuée symétriquement autour de a si

$$P(X\geq a+x) = P(X\leq\ a-x)\ ,\quad \forall x.$$

Soit X une variable aléatoire symétrique autour de a. Montrer que :

1. Si F est la fonction de répartition de X, on a : $F(a-x)=1-F(a+x)+P(X= a+x)$.
2. Si f est la densité de la variable aléatoire continue X, on a : $f(a-x)=f(a+x)$
3. $E(X)=a$.

Exercice 6:

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & si\ 0<x\leq a\\ 0 & autrement\end{cases}$$ où a est un réel positif non nul.

Donner les lois de probabilités des variables aléatoires : $Y=X^2$ et $Z=\sqrt{X}$.