Simulation des variables aléatoires

Prof. Mohamed El Merouani
http://elmerouani.jimdo.com
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

1

Simulation par la méthode d’inversion

2

Introduction:

- on suppose que l'on dispose d'un bon générateur de nombres pseudo-aléatoires et on se demande comment à partir d'une suite $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur [0, 1] construire une variable aléatoire de loi donnée, avec une attention particulière pour les lois usuelles continues et discrètes.

3

Plan

- Rappels sur la fonction de répartition
- Simulation des v.a. continues
- Simulation des v.a. discrètes

4

Fonction de répartition (Rappels):

Fonction de répartition d'une v.a. discrète:

- La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x est une fonction F(x).
- Cette fonction est appelée fonction de répartition de x.

  $F(x)=P(X\leq x) = \sum_{y\leq x} P(X=y)$
- La fonction F(x) est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1.

Exemple de fonction de répartition:

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a la loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

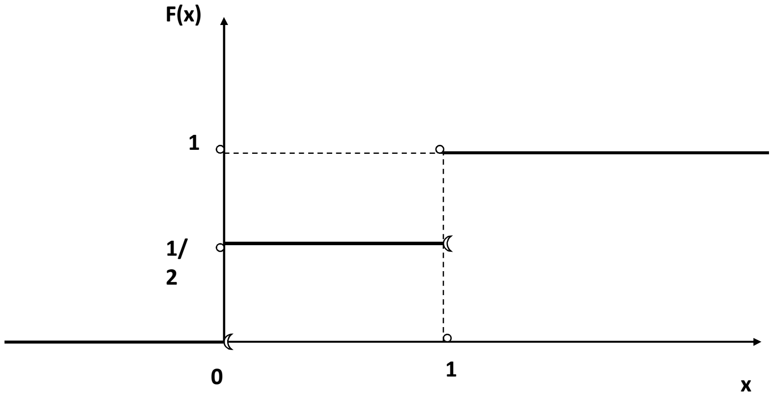
x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- Sa fonction de répartition sera:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

7

Représentation graphique de F(x):



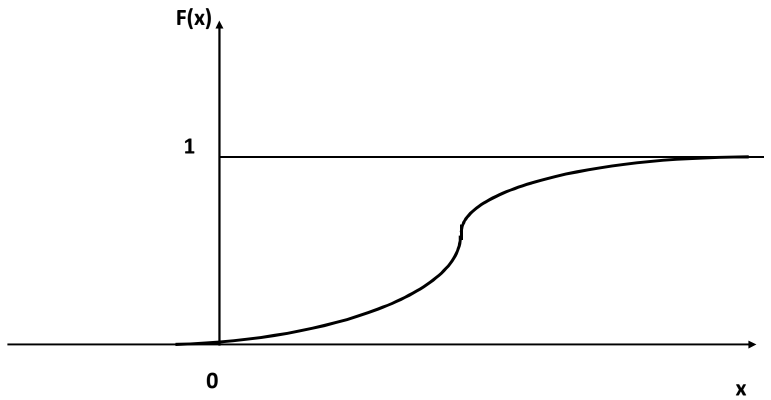
8

Fonction de répartition d'une v.a. continue:

- On définit la fonction de répartition F d'une v. a. continue X de la même manière que pour une v.a. discrète, c'est-à-dire $F(x)=P(X \leq x)$.
- La fonction continue $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est croissante de 0 à 1 lorsque x varie de -∞ à +∞.
- Par conséquent, une v.a. continue est une v.a. dont la fonction de répartition est continue.
- La fonction de densité f d'une v.a. continue X est la dérivée de da fonction de répartition F, c'est-à-dire $F'(x)=f(x)$.

9

Représentation graphique de F(x) continue:



10

Simulation des v.a. continues

11

Méthode d’inversion (Théorème):

Proposition:

Supposons que la v.a. X a pour fonction de répartition F **continue** et **strictement croissante**, toujours que $0<F(x)<1$.

Soit U v.a.$\rightarrow \mathcal{U}(0,1)$.

Alors, la v.a. $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.

12

Méthode d'inversion (dém):

Démonstration:

Soit G la fonction de répartition de $F^{-1}(U)$.

Alors: $G(x)=P(F^{-1}(U)\leq x)$

$=P(F(F^{-1}(U))\leq F(x))$. (par la monotonie de F)

$=P(U\leq F(x))=F(x)$. (car $U\rightarrow\mathcal{U}(0,1)$)

13

Méthode d'inversion (algorithme):

- Cette méthode suggère que pour générer des échantillons d'une v.a. X pour laquelle F^{-1} est connue, on peut générer des nombres aléatoires U uniformes sur (0,1) et faire $X=F^{-1}(U)$.
- Nous avons alors l'algorithme d'inversion suivant:

Générer $U\rightarrow\mathcal{U}(0,1)$
Faire $X=F^{-1}(U)$
Sortir X

14

Méthode d'inversion (Remarques):

- Une condition minime pour l'application de cette méthode est de connaître la forme explicite de F^{-1}.
- Cela est vérifié pour plusieurs lois de probabilités, comme l'uniforme, l'exponentielle, de Weibull, de Cauchy,…
- Remarquons qu'une telle condition n'est pas suffisante, par exemple, pour la loi beta, il est possible théoriquement de la simuler par inversion, mais elle peut résulter très couteuse.
- Parfois, nous disposons d'une bonne approximation de F^{-1}, d'où on peut utiliser la méthode par approximation.

15

Méthode d'inversion-Exemples:

1. Simulation d'une v.a. $\mathcal{U}(a,b)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\, x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\, a\le x<b \\ 1 & si\, x\ge b \end{cases}$$

Dans le schémas général, il suffit de faire:

$$X=F^{-1}(U)=a+(b-a)U$$

16

Méthode d'inversion-Exemples:

2. Simulation d'une v.a. de Weibull $\mathcal{W}(\alpha,1)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1-\exp\left(-x^{\alpha}\right) & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

Nous faisons $X=F^{-1}(U)=\left[-Ln(1-U)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$

ou bien $X=\left[-Ln\,U\right]^{\frac{1}{\alpha}}$ puisque $(1-U)\rightarrow\mathcal{U}(0,1)$

17

Méthode d'inversion-Exemples:

2. Simulation d'une v.a. exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1-\exp\left(-\lambda x\right) & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

Nous faisons $X=F^{-1}(U)=\left[-\frac{Ln(1-U)}{\lambda}\right]$

Ainsi pour générer un n-echantillon selon une $\mathcal{E}xp(\lambda)$ on pose puisque $(1-U)\rightarrow\mathcal{U}(0,1)$

$$\left(X_1,\cdots,X_n\right)=\left(-\frac{Ln\,U_1}{\lambda},\cdots,-\frac{Ln\,U_n}{\lambda}\right)$$

18

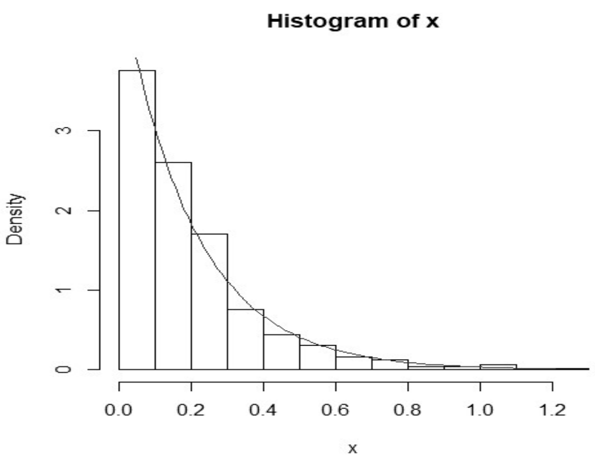
Simulation d'une v.a. exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$:

- Voici une implémentation en R:

```
myrexp<-function(n,lambda) + return(-log(runif(n))/lambda)
 ##Simulation d'une Exp(5)
 lambda<- 5
 x<- myrexp(500, lambda)
## Comparaison histogramme / densité
hist(x, freq=FALSE)##freq=FALSE pour aire=1
curve(dexp(x, lambda), xlim=c(0, max(x)), col="red", add=TRUE)
```

19

Simulation d'une v.a. exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$:



20

Simulation des v.a. discrètes

21

Les lois de probabilités discrètes:

- On considère une variable aléatoire discrète X qui peut prendre les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- Soit $P(X=x_i)=p_i$, i=1,2,…,n

  avec $p_i \geq 0$ et $\sum p_i=1$
- Sa loi de probabilité est donnée par:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	….	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	….	p_n	1

22

Fonction de répartition d'une loi de probabilité discrète:

- Sa fonction de répartition $F(x_i)=F_i=P(X\leq x_i)=\sum_{j<i} p_j$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x < x_1 \\ p_1 & si\ x_1 \leq x < x_2 \\ p_1+p_2 & si\ x_2 \leq x < x_3 \\ p_1+p_2+p_3 & si\ x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \\ 1 & si\ x \geq x_n \end{cases}$$

23

Fonction de répartition (inverse) d'une loi de probabilité discrète:

- On définit la fonction $\overline{F}$

$$\overline{F}(u)=\begin{cases} x_1 & si\quad 0<u<F(x_1) \\ x_2 & si\quad F(x_1)\leq u<F(x_2) \\ x_3 & si\quad F(x_2)\leq u<F(x_3) \\ x_4 & si\quad F(x_3)\leq u<F(x_4) \\ \vdots & \\ x_n & si\quad F(x_{n-1})\leq x<F(x_n)=1 \end{cases}$$

24

Méthode d'inversion pour les lois discrètes (Théorème):

- Soit $\overline{F}(u) = \min\{x : F(x) \geq u\}$
- Si $U \rightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors la v.a. $X = \overline{F}(U)$ a pour fonction de répartition F.
- Donc, dans ces conditions $\overline{F}$ joue le rôle de F^{-1}

25

Méthode d'inversion-Dém:

Remarquons le minimum est atteint parce que F est continue à droite, alors $\overline{F}$ est bien définie.

En plus, $F\left(\overline{F}(u)\right) \geq u$

et $\overline{F}\left(F(x)\right) = \min\{y : F(y) \geq F(x)\} \leq x$

D'où l'égalité des ensembles:

$$\{(u,x) : \overline{F}(u) \leq x\} = \{(u,x) : u \leq F(x)\}$$

et des probabilités:

$$P(X \leq x) = P\left(\overline{F}(U) \leq x\right) = P\left(U \leq F(x)\right) = F(x)$$

26

Algorithme de la méthode d'inversion pour les lois discrètes:

- Pour une loi discrète générale, on a $\overline{F}(u) = i$ avec $F_{i-1}<u\leq F_i$, donc la méthode d'inversion est équivalente à chercher l'indice i convenable dans la liste des F_i.
- En général:

$$\overline{F}(u) = x_i \qquad si \;\; F(x_{i-1}) = F_{i-1} \leq u < F_i = F(x_i)$$

- Algorithme:

```
Générer U→𝒰(0,1)
Tant que Fi≤U, Faire i=i+1
Sortir X=i
```


Simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre p ∈ [0, 1]:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	q=1-p	p	1

- Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ q = 1 - p & si\, 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\, x \geq 1 \end{cases}$$

Simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre p ∈ [0, 1]:

- Sa fonction de répartition inverse sera:

$$\overline{F}(u) = \begin{cases} 0 & si\ \ 0 < u < q = 1-p \\ 1 & si\ \ q = 1-p \le u < 1 \end{cases}$$

- D'où l'algorithme:

Générer $U \rightarrow \mathcal{U}(0,1)$
Si U≥1-p, sortir $X=1$
Autrement, Sortir $X=0$

29

Simulation d'une loi uniforme discrète:

- Une v.a. X suivant une loi de probabilité uniforme discrète prend les valeurs entiers naturelles i=1,2,…,n avec la même probabilité

$$P(X=i) = \frac{1}{n},\ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

- Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = P(X \le i) = \sum_{j \le i} p_j = \frac{i}{n} \qquad si\ \ i \le x < i+1$$

30

Simulation d'une loi uniforme discrète:

- Sa fonction de répartition inverse est:

$$\overline{F}(u) = X = i \quad si \ F(x_{i-1}) = F_{i-1} = \frac{i-1}{n} \leq u < \frac{i}{n} = F_i = F(x_i)$$

$$\Rightarrow i-1 \leq nu \leq i$$

ou encore $X = ent(nu) + 1$