Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences de Tétouan

Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018-2019

S.M.A. (Semestre 6)

T.D. de Probabilités 2

Série n°1

Exercice 1 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Montrer que :

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$
3. Si $A\in\mathscr{A}$ et $B\in\mathscr{A}$, alors $A-B \in \mathscr{A}$ et $A\Delta B\in\mathscr{A}$

Exercice 2 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B des événements de $\mathscr{A}$ et $(A_n)_{n\in IN}$, une suite d'événements de $\mathscr{A}$. Montrer que

i. $A \subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

ii. $P(A^c)=1-P(A)$

iii. $P(A\cup B)=P(A)+P(B) -P(A\cap B)$

iv. Si $(A_n)_n$ est une suite croissante, ou décroissante, d'événements alors $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

v. $P\left(\bigcup_{n\in IN} A_n\right) \leq \sum_{n\in IN} P(A_n)$

vi. Pour tout $n\in IN$, on a : $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(Inégalité de Bonferroni)

Exercice 3 :

Soient A et B des événements de $\mathscr{A}$.

Montrer que : $P(A\cap B)\geq 1-P(A^c)-P(B^c)$ (Inégalité de Boole).

Exercice 4 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Montrer que X^2 et $\frac{1}{X}$ si $\{X=0\}=\emptyset$ sont aussi des variables aléatoires. Soient maintenant a et b deux constantes réelles. Monter que $aX+b$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Soit F la fonction de répartition de X. Calculer les fonctions de répartitions de $|X|$ et de $aX+b$.

Série n° 1

Ex. 1 : Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.

{Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

Montrer que

1°) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2°) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathcal{A}$; alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

3°) Si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ alors :

$A - B \in \mathcal{A}$ et $A \Delta B \in \mathcal{A}$

Sol. 1 :

1) $\mathcal{A}$ tribu sur Ω

alors $\Omega \in \mathcal{A}$

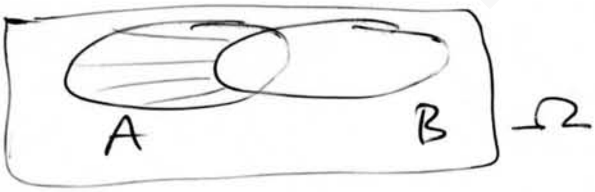
On a donc $\overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire.

2°) Soit $(A_i)_{i \in I}$ famille d'événements de $\mathcal{A}$

alors $A_i \in \mathcal{A}$ et par suite $\overline{A_i} \in \mathcal{A}$

On a alors $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ puisque $(\overline{A_i})_{i \in I}$ famille de $\mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A}$ tribu ; $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \in \mathcal{A}$.

3°) $A - B = A \cap \overline{B}$



$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$

alors $\overline{B} \in \mathcal{A}$

et par suite $A \cap \overline{B} = A - B \in \mathcal{A}$

, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

on $A - B \in \mathcal{A}$ et $B - A \in \mathcal{A}$

alors $(A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{A}$

d'où $A \Delta B \in \mathcal{A}$

Ex. 2 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit A, B des événements de $\mathcal{A}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Montrer que :

1) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

2) $P(A^c) = 1 - P(A)$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) Si (A_n) est suite croissante ou décroissante d'événements, alors $P(\lim\limits_{n \to +\infty} A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$

5) $P(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$

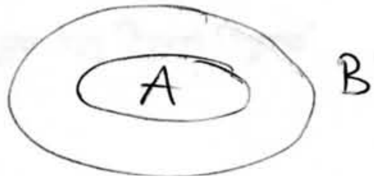
6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(Inégalité de Bonferroni)

Sol. 2 :

1) $A \subset B$



$\Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c)$

$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$

$\Rightarrow P(B) \geqslant P(A)$

2) $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c)$

$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A).$

3) $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

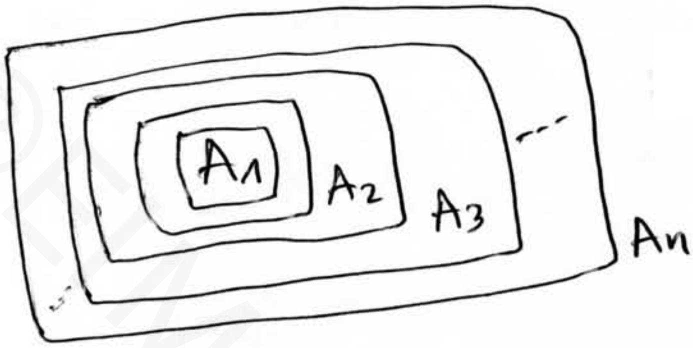
mais $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

donc $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) , Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'évènements

donc $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \geq 1)$



alors
$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

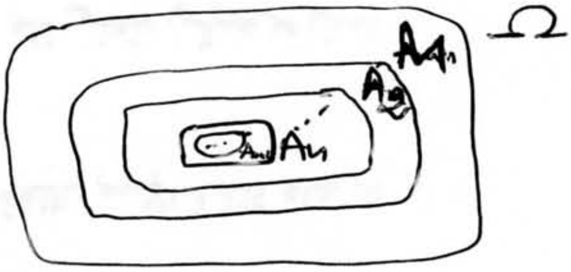
on a :
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots$$
$$= A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \ldots \cup (A_{n+1} - A_n) \cup \ldots$$

alors :
$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \ldots$$
(car les évènements A_1, $(A_2 - A_1)$, $(A_3 - A_2)$, ... sont deux à deux incompatibles)

et $$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = P\Big(\lim_{n \to +\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \Big[P(A_1) + P(A_2 - A_1) + \cdots + P(A_n - A_{n+1})\Big]$$
$$= \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$
$\Big($car $A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup \ldots \cup (A_n - A_{n-1})\Big)$

• Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'évènements

donc $A_{n+1} \subset A_n$
$\forall \; n \geq 1$



alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$

les évènements $(\Omega - A_1)$; $(A_1 - A_2)$; $(A_2 - A_3)$, ...
sont deux à deux incompatibles et leur réunion
vaut $\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n}$

d'où $P\left(\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n}\right) = P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_3) + \cdots$

On peut écrire :

$$P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + \cdots + P(A_{n-1} - A_n)\right]$$

Comme $(\Omega - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots (A_{n-1} - A_n) = \overline{A}_n$

On en déduit $P\left(\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{A}_n)$

et comme $P(\overline{A}_n) = 1 - P(A_n)$ et $P\left(\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$

alors $P\left(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$

Autre méthode !

$$(A_n)_n \searrow \Rightarrow (A_n^c)_n \nearrow$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n^c) = P\left(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^c\right)$

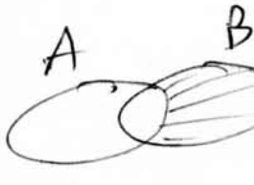
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1 - P(A_n)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right)$$

$$= P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1 - P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right)$$



5) Comme $A \cup B = A \cup (B - A)$

alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B-A)$

comme $(B-A) \subset B$ alors d'après 1°) $P(B-A) \leq P(B)$

par suite $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$

et plus généralement $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$

Soit $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$

d'après 4°) $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{n} P(A_n)$$

6) Inégalité de Bonferroni

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dém. "par récurrence"

$\underline{n=2}$ $P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
(déjà vue)

$\underline{n=3}$ $$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i<j}^{3} P(A_i A_j) + \underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{\geq 0}$$

donc $$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i<j}^{3} P(A_i A_j)$$

Supposons qu'elle est vraie pour $n-1$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right)$$

Donc $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n-1} P(A_i A_j) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n-1} P(A_i A_j) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j)$$ C.Q.F.D.

Exercice 3:

Inégalité de Boole:

$$P(A\cap B) \geqslant 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \quad \forall A, B$$

Dém:

$$P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A\cup B) \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad P(A\cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad P(A\cap B) \geqslant 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$$

T.D.

Tribu borelienne : Compléments

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tribu borelienne}$$

elle est engendrée par la classe $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a<b,\ a,b \in \mathbb{R} \}$

Remarquons que :

, $]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, b-\frac{1}{n}]$

, $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b]$

, $[a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b-\frac{1}{n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty}]a-\frac{1}{m}, b-\frac{1}{n}]$

, $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\cancel{b}\frac{1}{n}, a]$

, Si X est une v.a., les ensembles $\{X \leq x\}$, $\{a < X \leq b\}$, $\{X < x\}$, $\{a \leq X < b\}$, $\{a < X < b\}$ et $\{a \leq X \leq b\}$ sont tous des évènements, car :

. $\{a \leq X < b\} = X^{-1}([a,b[) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty}]a-\frac{1}{m}, b-\frac{1}{n}]\right)$

. $\{X < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - \frac{1}{n}\}$

. $\{X = x\} = X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]x-\frac{1}{n}, x]\right)$

. $\{a \leq X \leq b\} = X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b]\right)$

1) Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et a, b sont des constantes.

Alors $aX+b$ est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$

En effet :

$$\{\omega : aX(\omega)+b \leq x\} = \{aX(\omega) \leq x-b\}$$

$$= \begin{cases} \{X \leq \frac{x-b}{a}\} \in \mathcal{A} & \text{si } a>0 \\ \{X \geq \frac{x-b}{a}\} \cancel{\in} \{X < \frac{x-b}{a}\}^C \in \mathcal{A} & \text{si } a<0 \\ \Omega & \text{si } a=0 \text{ et } x-b \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } a=0 \text{ et } x-b<0 \end{cases}$$

On a utilisé le résultat suivant :

$$X \text{ v.a} \iff \{\omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet :

$(\Rightarrow)$ Puisque $]-\infty, x] \in \cancel{\mathcal{B}}$ $\cancel{\mathcal{A}'} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$

$(\Leftarrow)$ soit $E_x = \{\omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$

alors $E_x \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

or, les ensembles $I_x =]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, engendrent la tribu borelienne i.e $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_x)$

D'autre part $\underbrace{\sigma(X^{-1}(I_x))}_{=\sigma(E_x)} = X^{-1}(\sigma(I_x))$

Donc ; $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(B) \in \sigma(E_x) \subset \mathcal{A}$

$\Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Remarque : Exercice 4 ($1^{ère}$ partie)

Si X est une v.a., il en est de même pour X^2 et $\frac{1}{X}$ si $\{X=0\}=\phi$.

En effet : $\{X^2 \leq x\} = \{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} \in \mathcal{A}$

$$\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} = \left\{\frac{1}{X} \leq x, X<0\right\} + \left\{\frac{1}{X} \leq x, X>0\right\} + \left\{\frac{1}{X} \leq x, X=0\right\}$$

$$= \{xX \leq 1\} \cap \{X<0\} + \{xX \geq 1\} \cap \{X>0\}$$

$$= \begin{cases} \{X<0\} & \boxed{\text{si } x=0} \\ \{X \leq \frac{1}{x}\} \cap \{X<0\} + \{X \geq \frac{1}{x}\} \cap \{X>0\} & \boxed{\text{si } x>0} \\ \{X \geq \frac{1}{x}\} \cap \{X<0\} + \underbrace{\{X \leq \frac{1}{x}\} \cap \{X>0\}}_{=\phi} & \boxed{\text{si } x<0} \end{cases}$$

donc $\frac{1}{X}$ v.a.

Fonction d'une v.a.

Th Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit g une fonction mesurable-Borel sur $\mathbb{R}$. Alors $g(X) = g \circ X$ est une v.a.

Dem $\{g(X) \leq y\} = \{X \in g^{-1}(]-\infty, y])\}$

Or g mesurable-Borel $\Rightarrow g^{-1}(]-\infty, y]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \{X \in g^{-1}(]-\infty, y])\} \in \mathcal{A}$

i.e $\{X \in g^{-1}(]-\infty, y])\} = X^{-1}(g^{-1}(]-\infty, y])) \in \mathcal{A}$

$g(X) = g \circ X$ v.a.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[dr, dashed, "g\circ X"'] & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \arrow[d, "g"] \\ & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \end{tikzcd}$$

Ex: Soit F la fonction de répartition de X. Calculons les fonctions de répartition de $|X|$ et $aX+b$.

En effet :

, $P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\}$

$$= F(y) - F(-y) + P\{X = -y, y>0\}$$

, $$P\{aX+b \leq y\} = \begin{cases} P\{X \leq \frac{y-b}{a}\} & \text{si } a>0 \\ P\{X \geq \frac{y-b}{a}\} & \text{si } a<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } a>0 \\ 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right) + P\{X = \frac{y-b}{a}\} & \text{si } a<0 \end{cases}$$