Séance 6
Caractéristiques des lois usuelles

Prof. Mohamed El Merouani

2018/2019

Introduction

Pour calculer l'espérance, la variance et les moments d'ordre supérieurs, on peut utiliser :

- la méthode directe (définition de ces moments)
- la fonction génératrice
- la fonction génératrice des moments
- la fonction caractéristique

Introduction

Nous avons déjà calculé l'espérance et la variance pour les lois :

- binomiale, en utilisant sa fonction caractéristique
- de Poisson, en utilisant la fonction génératrice et aussi la fonction caractéristique
- normale centrée réduite et la normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, en utilisant la fonction caracéristique
- uniforme sur l'intervalle $]a, a+b[$, en utilisant la fonction caractéristique et son dévellopement en série.

Soit a un nombre fixé.
Soit X une v.a. prenant la valeur a avec $P(X = a) = 1$.
On appelle loi de Dirac au point a la probabilité δ_a avec :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = a$$

et sa variance est :

$$Var(X) = 0$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = e^{ita}$$

Loi de Bernoulli :

Une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \ (0 \leq p \leq 1)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
Son espérance mathématique est :

$$E(X) = p$$

Sa variance est :

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = pe^{it} + (1 - p)$$

Loi binomiale :

Une v.a. discrètre X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \sim B(n,p)$ si

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; (0 \leq k \leq n)$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = np$$

Sa variance est :

$$Var(X) = np(1-p)$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n$$

Loi de Poisson :

Une v.a. discrètre X suit une loi de Poisson de paramètre λ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; $\quad (\lambda > 0)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \lambda$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \lambda$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right)$$

Loi géométrique :

Une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre p si

$$\forall k \in X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1};$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$$

Loi binomiale négative :

Une v.a. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p et on note $X \sim NB(n,p)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad P(X = k) = C_{k+n-1}^{k} p^n (1-p)^k;$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = n\frac{1-p}{p}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{n}{p^2}(1-p)$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^n; \quad \text{pour} \quad |(1-p)e^{it}| < 1$$

Loi multinomiale :

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$ suit une loi multinomiale de paramètres $n, p_1, p_2, \cdots, p_m$ si

$$P(X_1 = n_1, \cdots, X_m = n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \cdots, p_m^{n_m}$$

où $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$
L'espérance mathématique d'une composante X_i est :

$$E(X_i) = np_i; \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

Sa variance est :

$$Var(X_i) = np_i(1 - p_i); \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_m) = \left(\sum_{k=1}^{m} p_k e^{it_k} \right)^m$$

Une v.a. continue X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$$

Loi exponentielle :

Une v.a. continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \exp(\lambda)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Loi gamma :

Une v.a. continue X suit une loi gamma de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it^{-\alpha}}{\beta}\right)$$

Loi bêta :

Une v.a. continue X suit une loi bêta de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)}{k!} \frac{\Gamma(\alpha) + k}{\Gamma(\alpha + \beta + k)}$$

Loi de Laplace :

Une v.a. X suit une loi de Laplace de paramétres α et $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}; \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \alpha$$

Sa variance est :

$$\frac{Var(X) = 2}{\lambda^2}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{\lambda^2 e^{it\alpha}}{t^2 + \lambda^2}$$

Loi de Cauchy :

Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètres α et $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}; x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \exp\left(i\alpha t - \lambda|t|\right)$$

Loi normale :

Une v.a. X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma > 0$ et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = m$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \sigma^2$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \exp\left(imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

Loi normale centrée réduite :

Une v.a. X suit une loi normale centrée réduite s'il suit une loi normale de paramètre $m = 0$ et $\sigma = 1$ et on note $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = 0$$

Sa variance est :

$$Var(X) = 1$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Loi du Khi-deux :

Une v.a. X suit une loi de Khi-deux avec n degrés de liberté si sa densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = n$$

Sa variance est :

$$Var(X) = 2n$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$