Séance 5
Fonctions Caractéristiques (1)

Prof. Mohamed El Merouani

2018/2019

Introduction :

- Si X est une v.a. quelconque, la fonction génératrice $G(s) = E(s^X)$, nous invite à former : $\int_{-\infty}^{+\infty} s^x dF(x)$.
- Cette intégrale a un sens auvoisinage de $|s| = 1$, ce qui conduit à poser $s = e^{it}$ et á donner à t des valeurs réelles.
- On obtient finalement la fonction : $E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$ notée $\varphi_X(t)$ et dite fonction caractéristique de X
- La fonction caractéristique de X a l'énorme avantage d'exister pout tout nombre réel t et toute v.a. X.
- En outre, la correspondance entre loi de probabilité d'une v.a. et fonction caractéristique est bijective.

Fonction caractéristique

Définition

On définit la fonction caractéristique de la v.a. X, par :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \sum_x e^{itX} P(X = x) & \text{si} \quad X \quad \text{est discrete;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx & \text{si} \quad X \quad \text{est continue} \end{cases}$$

Comme $|e^{itx}| = 1$ pour tout réel t, par exemple, si X est une variable aléatoire absolument continue, l'intégrale

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

existe pour toute fonction de densité f et la fonction caractéristique peut être définie pour toute variable aléatoire X.

Propriétés :

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Si $Y = aX + b$, a et b étant des constantes, alors

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)e^{ibt},$$

   où φ_X et φ_Y sont les fonctions caractéristiques des variables aléatoires X et Y.
4. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

Preuves :

1. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet : $\varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
2. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet : $|\varphi(t)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
3. $\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb} E(e^{itaX}) = e^{itb} \varphi_X(at)$.
4. $\varphi(-t) = E[e^{-itX}] = E(\cos tX) - iE(\sin tX) = \overline{E[\cos(tx)] + iE[\sin(tx)]} = \overline{E[\cos(tx) + i\sin(tx)]} = \overline{E[e^{itX}]} = \overline{\varphi(t)}$

Théorème 1 :

Soit X la v.a. de fonction de répartition $F(x)$ et de fonction caractéristique $\varphi_X(t)$. Alors $\varphi_X(t)$ est uniformèment continue sur $\mathbb{R}$

Preuve :

On considère la différence :

$\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\left(e^{ixh} - 1\right) dF(x)$

ce qui entraîne $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ixh} - 1| dF(x)$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, choisissons A suffisamment grand pour que $\int_{|x|>A} dF(x) < \frac{\varepsilon}{4}$ et choisissons h assez petit de manière que pour $|x| < A$ on ait : $|e^{ixh} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ Alors on a :

$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq \int_{-A}^{A} |e^{ixh} - 1| dF(x) + 2\int_{|x|\geq A} dF(x) < \varepsilon$

car $|e^{ixh} - 1| \leq |e^{ixh}| + |1| \leq 1 + 1 = 2$

Théorème 2 :

Si le moment d'odre $k \geq 1$ de la v.a. X existe, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ admet une dérivée d'odre k continue au voisinage de l'origine et $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$.

<u>Preuve :</u> On sait que :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

on constate que pour tout nombre réel t, on a :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dF(x) < \infty \quad \text{(par hypothèse)}$$

On peut donc dériver à l'ordre k sous le signe somme l'intégrale qui définit $\varphi(t)$ et écrire, pour tout nombre réel t l'expression

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k(e^{itx})}{dt^k} dF(x) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF(x)$$

Théorème 2 :

Preuve :(Suite)
Cette dérnière intégrale est donc absolument convergente ; elle est uniformément convergente en t.
L'intégrale obtenue est la dérivée d'ordre k de $\varphi(t)$ et enfin cette intégrale est continue en t. On a donc :

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF(x)$$

la limite pour $t = 0$ est $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) = i^k E(X^k)$.

Exemple 1 :

On considère X une v.a. qui suit une loi binomiale $B(n,p)$. À partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.

On a :

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{iu})^k (1-p)^{(n-k)} = \left(pe^{iu} + (1-p)\right)^n.$$

Exemple 1

La dérivée $\varphi'(u)$ s'écrit

$$\varphi'(u) = n\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-1} ipe^{iu};$$

d'où $$E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = np.$$

La dérivée

$$\varphi''(u) = -npe^{iu}\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-2}\left(npe^{-iu} + (1-p)\right);$$

et $E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = -\left[-n(n-1)p^2 - np\right] = n(n-1)p^2 + np.$
La variance $Var(X)$ est donc $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Exemple 2 :

On considère X une v.a. qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. À partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.

On a :

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iu}}$$

$$\varphi(u) = \exp\left(\lambda(e^{iu} - 1)\right)$$

La dérivée $\varphi'(u)$ s'écrit $\varphi'(u) = \lambda i e^{iu} \exp\left(\lambda(e^{iu} - 1)\right)$;

$$\text{d'où} \qquad E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \lambda.$$

Exemple 2 :

La dérivée $\varphi''(u)$ s'écrit :

$$\varphi''(u) = -\lambda i e^{iu} \exp(\lambda(e^{iu} - 1)) - \lambda i e^{iu} \lambda i e^{iu} \exp(\lambda(e^{iu} - 1))$$

$$= -\lambda i e^{iu} \exp(\lambda(e^{iu} - 1)) - (\lambda i e^{iu})^2 \exp(\lambda(e^{iu} - 1));$$

d'où

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = -(-\lambda - \lambda^2) = \lambda^2 + \lambda$$

La variance $Var(X)$ est donc

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Exemples

Exemple 3 :

On considère X une v.a. qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une v.a. qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. À partir de la fonction caractéristique de X, on calculera la fonction caractéristique de Y et on en retrouvra l'espérance mathématique et la variance de Y.

On a :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - \frac{x^2}{2}} dx$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin ux dx = 0,$$

alors :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ux dx$$

Exemple 3 :

et

$$\varphi'_X(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin ux dx$$

Une intégration par partie donne

$$\varphi'_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin ux d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

donc

$$\varphi'_X(u) = -u\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ux dx = -u\varphi_X(u)$$

On en tire $\frac{\varphi'_X(u)}{\varphi_X(u)} = -u$ ou $[\ln \varphi_X(u)]' = -u$
Ce qui implique

$$\ln \varphi_X(u) = \frac{-u^2}{2} + c.$$

Comme $\varphi_X(0) = 1$, on a $c = 0$ et $\varphi_X(u) = e^{\frac{-u^2}{2}}$.

Exemple 3 :

Si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, on peut représenter Y sous la forme $Y = \sigma X + m$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$; d'où

$$\varphi_Y(u) = \varphi_{\sigma X+m}(u) = e^{ium} e^{\frac{-u^2\sigma^2}{2}}$$

La dérivée $\varphi'_X(u)$ s'écrit

$$\varphi'_Y(u) = (im - u\sigma^2) e^{ium} e^{\frac{-u^2\sigma^2}{2}}$$

et $E(Y) = \frac{1}{i}\varphi'_Y(0) = m$.
La dérivée $\varphi''_Y(u)$ s'écrit

$$\varphi''_Y(u) = -\sigma 2 e^{ium - \frac{u^2\sigma^2}{2}} + (im - u\sigma^2)^2 e^{ium - \frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

et $E(Y^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''_Y(0) = -(-\sigma^2 + i^2 m^2) = \sigma^2 + m^2$
La variance $Var(Y)$ est donc $Var(Y) = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2$

On a vu que, pour la fonction génératrice des moments $M(t)$, on a :

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{(t)^k}{k!}$$

On a un résultat pareil pour la fonction caractéristique $\varphi(t)$ qui découle du théorème précèdent :

Corollaire :

Si les n premiers moments de X, $m_k = E[X^k](k = 1, 2, \cdots, n)$ existent, alors on a pour $t \to 0$,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} m_k + o(t^n)$$

Preuve : Elle résulte immédiatement du théorème précèdent

Exemple 4 :

Soit X une v.a. uniforme sur $]a, a+b[$ de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } a < x < a+b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculons sa fonction caractéristique et en déduire ses moments.

$$\varphi(t) = \frac{1}{b}\int_a^{a+b} e^{itx}dx = \frac{1}{ibt}\left(e^{i(a+b)t} - e^{iat}\right)$$

$$= \frac{1}{ibt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\left[(a+b)^n - a^n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(it)^{n-1}}{n!}\frac{(a+b)^n - a^n}{b} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{b(n+1)}$$

Exemple 4

En vertu de corollaire, on a :

$$m_n = \frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{b(n+1)}; n = 0, 1, 2, \cdots$$