Simulation des vecteurs aléatoires

Prof. Mohamed El Merouani

2018/2019

Plan

- Méthodes générales
    - Lois indépendantes
    - Lois dépendantes avec des conditionnelles connues
    - Lois discrètes
- Méthodes spécifiques
    - Loi normale n-dimensionnelle
    - loi de Wishart
    - Loi de Dirichlet
    - Loi multinomiale

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire.
Le cas le plus simple est celui de l'indépendance des lois marginales, c'est-a-dire :

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

avec $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Il suffit, alors, de gènèrer de chacune des composantes X_i, qui sont des v.a. unidimensionnelles et sortir $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

On utilise la décomposition

$$F(x) = F_1(x_1)F_2(x_2/x_1)\cdots F_n(x_n/x_1,\cdots,x_{n-1})$$

si nous avons les lois de

$$X_i/x_1,\cdots,x_{i-1}; \quad i = 1,\cdots,n$$

dans le sens qu'elles sont de simulation efficiente, nous avons alors la méthode simple suivante :

Depuis $i = 1$ jusqu'à n
Générer $x_i \sim X_i/x_1,\cdots,x_{i-1}$
Sortir $x = (x_1, x_2,\cdots,x_n)$

Dans plusieurs cas, ces lois conditionnelles ne sont pas disponibles. Une altrenative est, alors, l'utilisation des méthodes basées sur les chaînes de Markov.

- Théoriquement, la simulation des lois discrètes multi-diemensionnelles n'est pas très diffèrente des uni-dimensionnelles.
- Dans la pratique, ces lois multi-dimensionnelles ont un support très grand, ce qui provoque, comme conséquence des problèmes considérables en appliquant les méthodes standards.
- La recherche directe résulte souvent très lente, mais il existe des méthodes alternatives (méthdoe de recherche indexée...etc) qui fonctionnent mieux, toujours et lorsqu'on dispose d'espace de mémoire suffisant.

Une idée simple est d'utiliser une recherche suivant les composantes. Par exemple, pour un couple de v.a. (X, Y) de support $\{1, \cdots, L\} \times \{1, \cdots, M\}$, nous faisons

$$P_{xy} = P(X < x) + P(X = x, Y \leq y)$$

et on utilise X comme indice : nous cherchons d'abord en (P_{xM}) pour $P_{x0} \leq P(X \leq x - 1) < U \leq P(X \leq x) = P_{xM}$.
Après, nous cherchons y de P_{x0} à P_{xM}, de manière que $P_{x,y-1} < U \leq P_{xy}$.

Une v.a. n-dimensionnelle $X = (X_1, \cdots, X_n)$ suit une loi normale multidimensionnelle de paramétre μ et Σ, notée $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, où $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ est le vecteur des moyennes et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

est la matrice des variances-covariances.
Remarquons que $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$.

Comme Σ est une matrice symétrique et définie positive, il existe une matrice triangulaire inférieure

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

telle que $\Sigma = SS^t$, ce que l'on appelle la décomposition de Cholesky. Alors, on a $X = SZ + \mu$, avec $Z \sim \mathcal{N}(0, I)$, et I la matrice identité d'ordre n.

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire qui suit la loi normale n-dimensionnelle $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ où $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ est le vecteur des moyennes et Σ est la matrice des variances-covariances.
Considérons la méthode suivante basée sur la décomposition de Cholesky, puisqu'elle est facile et efficiente.
Nous supposons que $\Sigma = LL^t$ pour une certaine matrice L. Alors, si $Z = (Z_1, \cdots, Z_n)$ est normale centrée réduite indépendantes, la variable $X = \mu + LZ$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Il suffit, alors, de faire

Générer $Z_1, \cdots, Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$
Faire $X = \mu + LZ$

Le problème est de trouver la matrice L, qui existe toujours. Une possibilité est de prendre comme décomposition de Cholesky L de Σ, l'unique matrice triangulaire inférieure telle que $LL^t = \Sigma$, pour laquelle $X = \mu + LZ$ se calcule de manière efficiente.

Soient $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma); k = 1, \cdots, n$ des v.a. normales multidimensionnelles avec matrice des variances-covariances commune. La v.a. $W = \sum_{k=1}^{n} X_k X_k^t$ suit, alors, une loi de Wishart non-centrée, que l'on note $\mathcal{W}(n, \Sigma, \Delta)$, où $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mu_k^t$.
Si $\Delta = 0$, alors, on dit que la v.a. W suit une loi de Wishart centrée et on la note $\mathcal{W}(n, \Sigma)$.
On veut échantillonner à partir de la loi de Wishart $\mathcal{W}(n, \Sigma, \Delta)$.
Lorsque $\Delta = 0$, si $\Sigma = LL^t$ et $V = \sum_{i=1}^{n} Z_i Z_i^t$ où Z_i sont normales p-dimensionnelles $\mathcal{N}(0, I), i = 1, \cdots, n$ alors $W = LVL^t \sim \mathcal{W}(n, \Sigma, \Delta)$.

Ce qui nous conduit à l'algorithme suivant :

Générer $Z_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1); i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, p$
Faire $V = \sum_{i=1}^{n} Z_i Z_i^t$
Faire $W = LVL^t$

La méthode implique la génération de np lois normales centrées réduites ! !

Dans le cas non centré ($\Delta \neq 0$), Δ est une matrice symétrique définie non-négative. Soit $\Delta = \Gamma\Gamma^t$ sa décomposition de Cholesky et $\mu_1, \cdots, \mu_p$ les lignes de Γ. Alors, on peut écrire (Chambers, 1970)

$$W = \sum_{1}^{p} (\mu_k + LZ_k)(\mu_k + LZ_k)^t + \sum_{p+1}^{n} LZ_k Z_k^t L^t$$

d'où s'ensuit une méthode similaire au cas centré qui génére np lois normales.

La généralisation de la loi bêta uni-dimensionnelle à une loi $(p-1)$-dimensionnelle est la loi de Dirichlet de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ que l'on note $Dir(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$, où les α_i sont des réels positifs. Sa fonction de densité est :

$$f(x_1, ..., x_{p-1}) = \frac{\Gamma(\alpha_1, ..., \alpha_p)}{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p)} x_1^{\alpha_1 - 1} ... x_{p-1}^{\alpha_{p-1}-1} (1 - x_1 - ... - x_{p-1})^{\alpha_p - 1}$$

définie sur

$$S_p = \{(x_1, ..., x_{p-1}) : x_i \geq 0, i = 1, \cdots, p-1, \sum_{i=1}^{p-1} x_i \leq 1\}$$

Si $p = 2$, alors la loi de Dirichlet $Dir(\alpha_1, \alpha_2)$ est une loi $\mathcal{B}\rceil(\alpha_1, \alpha_2)$.
Un résultat intéressant qui permet d'obtenir la loi de Dirichlet à partir de la loi gamma est le suivant :

Si $X_1, \cdots, X_p$ sont des v.a. multidimensionnelles de lois $\Gamma(\alpha_i, 1)$; $i = 1, \cdots, p$ alors la v.a. multidimensionnelle $(Y_1, \cdots, Y_p)$ avec

$$Y_i = \frac{X_i}{\sum_{j=1}^{n} X_j}$$

suit une loi de Dirichlet $Dir(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$

Nous souhaitons échantillonner à partir de la loi de Direchlet $Dir(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, où nous supposons que $\alpha_i > 0$, pour $i = 1, \cdots, n$. Nous appliquons la méthode de transformation. On sait que si $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)\,; i = 1, \cdots, n$, alors $(Y_1, \cdots, Y_n) \sim Dir(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, où

$$Y_i = \frac{X_i}{\sum_{j=1}^{n} X_j}$$

L'algorithme est, alors :

Générer $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)$, $i = 1, \cdots, n$
Faire $Y_i = \frac{X_i}{\sum_{j=1}^{n} X_j}$
Sortir $(Y_1, \cdots, Y_n)$

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_p)$ suit une loi multinomiale de paramètres $n, q_1, q_2, \cdots, q_p$ et on note
$X = (X_1, \cdots, X_p) \sim \mathcal{M}(n, q_1, \cdots, q_p)$, si

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_p = x_p) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_p!} q_1^{x_1} q_2^{x_2} \cdots q_p^{x_p}$$

où $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ et $\sum_{i=1}^{p} q_i = 1; q_i > 0; i = 1, \cdots, p$.
Nous désirons échantillonner à partir de la loi multinomiale de paramètres $n, q_1, \cdots, q_p$. On sait que, pour cette loi,
$X_i \sim \mathcal{B}(n, q_i); i = 1, \cdots, p$

$$X_i / X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1} \sim \mathcal{B}(n - x_1 - \cdots - x_{i-1}, \omega_i); i = 2, \cdots, p$$

avec $\omega_i = \frac{q_i}{1 - q_1 - \cdots - q_{i-1}}$

Il résulte, alors, l'algorithme :

Faire $m = n$, $i = 1$, $\omega = 1$, $X_i = 0, i = 1, \cdots, p$
Chaque fois que $m \neq 0$
    Générer $X_i \sim \mathcal{B}(m, \frac{q_i}{\omega})$
Faire $m = m - X_i, \omega = 1 - q_i, i = i + 1$