Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018-2019
S.M.A. (Semestre 6)
T.D. de Probabilités 2

Série n°2

Exercice 1 :

Soit l'espace probabilisable (IR, $\mathcal{B}(IR)$). On considère la fonction f définie de IR dans IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$ où α est un réel positif non nul.

Pour tout événement $A \in \mathcal{B}(IR)$, on pose $P(A) = \int_A f(x)dx$.

Montrer que P est une mesure de probabilité sur (IR, $\mathcal{B}(IR)$).

Exercice 2 :

On donne la variable aléatoire continue X de densité de probabilité f_X. On considère la variable aléatoire $Y=kX$ avec k est un réel positif non nul. Trouver la fonction de densité f_Y de Y et vérifier que c'est bien une densité de probabilité.

Exercice 3 :

Sur (Ω, $\mathcal{A}$, P) un espace probabilisé, on définit la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ indicatrice d'un événement $A \in \mathcal{A}$, par $\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$.

Donner la fonction de répartition de l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A dont la probabilité est égale à p.

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$; et soit un nombre a tel que $x_1 \leq a \leq x_n$. On considère la variable aléatoire $Z=\min(X,a)$ représentant le nombre minimal entre les valeurs de la variable aléatoire X et du nombre a. Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

Exercice 5:

On dit qu'une variable aléatoire X est distribuée symétriquement autour de a si

$$P(X \geq a+x) = P(X \leq a-x), \quad \forall x.$$

Soit X une variable aléatoire symétrique autour de a. Montrer que :

1. Si F est la fonction de répartition de X, on a : $F(a-x)=1-F(a+x)+P(X=a+x)$.
2. Si f est la densité de la variable aléatoire continue X, on a : $f(a-x)=f(a+x)$
3. $E(X)=a$.

Exercice 6:

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & si\ 0 < x \leq a \\ 0 & autrement \end{cases}$$ où a est un réel positif non nul.

Donner les lois de probabilités des variables aléatoires : $Y=X^2$ et $Z=\sqrt{X}$.

Série n° 2

Rappels sur la fonction indicatrice d'un évènement A :

Définition : L'indicatrice d'un évènement A

$$\Omega \to \{0,1\}$$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Proposition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Alors
$\mathbb{1}_A$ est une fonction mesurable $\Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}$.

Donc :

$$\mathbb{1}_A \text{ v.a. } \Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}.$$

Propriétés :

1°) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$

2°) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$

3°) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

4°) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

5°) $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\,\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

6°) $\mathbb{1}_{A\times B(x,y)} = \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(y)$ pour tout $(x,y) \in \Omega^2$

Cas particulier de 4°) si A et B sont disjoints

alors $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$

En effet : si $x \in A$ alors $x \notin B$

Donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$; $\mathbb{1}_B(x) = 0$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$

Par conséquent $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x)$

De même si $x \in B$; $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x)$

Ex. 1 :

D'abord $P \geqslant 0$ et $P(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + \left[-e^{-\alpha x}\right]_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{car}}\ \alpha > 0 \text{ et } \alpha e^{-\alpha x} > 0 \quad (\forall x \geqslant 0) \\ \text{donc } f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \geqslant 0 \end{array}}$

Ensuite $P(B) = \int_B f(x)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

D'autre part, considérons une suite $(A_n)_n$ d'évènements boréliens, deux à deux disjoints et de réunion A.

On a, alors $f \cdot \mathbb{1}_A = \sum_n f\, \mathbb{1}_{A_n}$ (propriété de l'indicatrice)

$$P(A) = \int f(x)\, \mathbb{1}_A \cdot dx = \int \sum_n f(x)\, \mathbb{1}_{A_n}\, dx$$

$$= \sum_n \int f(x)\, \mathbb{1}_{B_n}\, dx = \sum_n P(A_n)$$

(d'après le th. monotone de Beppo-Levi)

d'où P est une mesure de Probabilité.

Ex. 2 : X v.a. continue de densité f_X
$Y = kX$ avec $k > 0$; donc aussi v.a.

Considérons les fonctions de répartition F_X de X et F_Y de Y

On a : $F_X(x) = P(X \leq x)$ et $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$$F_Y(y) = P(kX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{k}\right) = F_X\left(\frac{y}{k}\right)$$

d'où $f_Y(y) = \dfrac{d F_Y(y)}{dy} = \dfrac{1}{k} \dfrac{d F_X\left(\frac{y}{k}\right)}{d\left(\frac{y}{k}\right)} = \dfrac{1}{k} \dfrac{d F_X(x)}{dx}$

i.e. $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X(x)}$

Autre méthode : $Y = g(X)$ avec $g(x) = kx$

$g'(x) = k > 0$ donc g continue, strict. croissante

$g^{-1}(y) = \frac{y}{k}$ et $\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{k}$

alors $f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{y}{k}\right) = \frac{1}{k} f_X(x)$

vérification :

- $f_Y(y) \geqslant 0$ car $\frac{1}{k} > 0$ et $f_X\left(\frac{y}{k}\right) > 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{y}{k}\right) dy = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) . k . dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Espérance d'une fonction indicatrice :

Soit l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un évènement A dont la probabilité est égale à p. [i.e. $P(A) = p$]

Loi de $\mathbb{1}_A$:

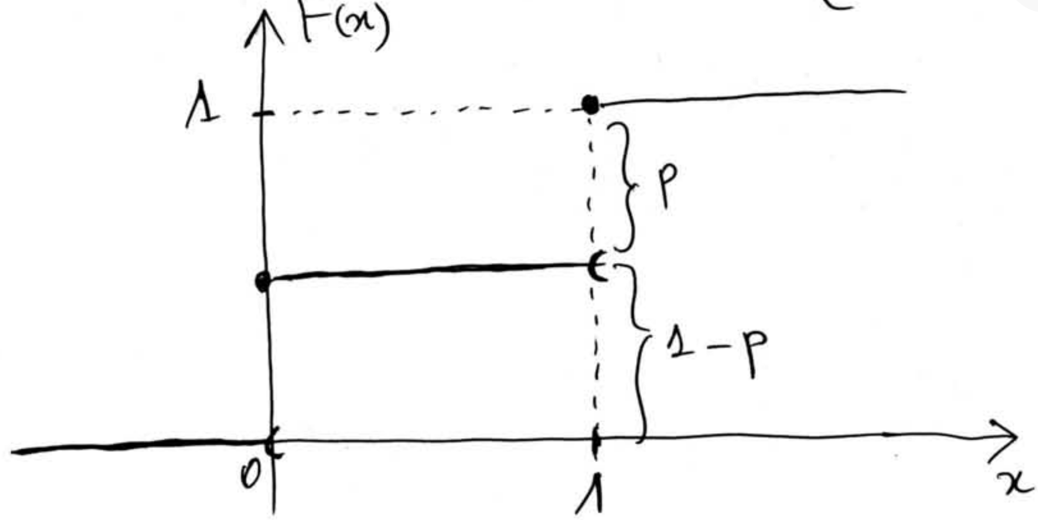
$x_i = \mathbb{1}_A(\omega)$	0	1
$P(\mathbb{1}_A = x_i)$	$1-p$	p

$$E(\mathbb{1}_A) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p = P(A)$$

Exercice 3 :

Fonction de répartition de l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'évènement A telle que $P(A) = p$

$$F(x) = P(\mathbb{1}_A \leq x) = P(\omega / \mathbb{1}_A(\omega) \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1-p & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$



Exercice 4 de la série n° 2 :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$
$$= P(\min(X, a) \leq z)$$

1er Cas : si $X \leq a$; donc $\min(X, a) = X$

alors $F_Z(z) = P(X \leq z) = F_X(z)$

2ème Cas : si $X > a$

donc $\min(X, a) = a$

dans ce cas $Z = a$

alors $P(Z = a) = 1 - \sum_{x_i \leq a} p_i$

Exemple : Soit X une v.a. discrète de loi donnée par le tableau suivant :

$X = x_i$	1	3	5	7	9
$p_i = P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Trouver la répartition (la loi) de la v.a. $Z = \min(X, 4)$

Alors

$Z = z$	1	3	4
$P(Z = z)$	0,1	0,2	0,7

Suite de l'exemple : (ex. 4 série 2)

Dans l'exercice, on nous demande la loi (que l'on peut donner par le tableau dans ce cas discrèt) en disant la répartition, qui est la même chose que la distribution de probabilité ....

Si on veut donner la fonction de répartition, on aura,

Pour X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0,1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 0,3 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 0,6 & \text{si } 5 \leq x < 7 \\ 0,9 & \text{si } 7 \leq x < 9 \\ 1 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$

Pour $Z = \min(X,4)$:

lorsque $X \leq 4$
$F_Z(z) = F_X(x)$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1 \\ 0,1 & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ 0,3 & \text{si } 3 \leq z < 4 \\ 1 & \text{si } z \geq 4 \end{cases}$$

Bien sûr $F_Z(z) = P(Z \geq 4) = 1$ (lorsque $X > 4$)

Ex.5:

1°) $$P(X \geq a+x) = P(X \leq a-x) = F(a-x)$$

$$\|$$

$$1 - P(X < a+x) = 1 - \left(P(X \leq a+x) - P(X = a+x)\right)$$
$$= 1 - P(X \leq a+x) + P(X = a+x)$$
$$= 1 - F(a+x) + P(X = a+x)$$

2°) Dérivons par rapport à x, on obtient

$$-f(a-x) = -f(a+x) \Rightarrow f(a-x) = f(a+x)$$

3°) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

$$E(X-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) f(x)\, dx = E(X) - a$$

chgt de variable

$$x - a = y \Rightarrow dx = dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y+a)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(a-y)\, dy$$

on pose $a - y = z \Rightarrow \quad y = a - z$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} (a-z) f(z)\, dz$$

$$= +\int_{-\infty}^{+\infty} (a-z) f(z)\, dz = a - E(X)$$

$$E(X) - a = a - E(X) \Rightarrow 2E(X) = 2a$$
$$\Rightarrow E(X) = a$$

Sol. 6 :

Soit F la fonction de répartition de X

Soit G la fonction de répartition de $Y = X^2$

et soit H la fonction de répartition de $Z = \sqrt{X}$

On note, donc, g et h les fonctions de densité de Y et Z respectivement.

Déterminons g :

Soit $y \in \mathbb{R}$; $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$

si $y < 0$; $P(Y \leq y) = 0$

si $y \geq 0$; $P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

$$= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$$

$$= F(\sqrt{y}) - \underbrace{F(-\sqrt{y})}_{=0} = F(\sqrt{y})$$

or $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

donc $G(y) = P(Y \leq y) = F(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{a} & \text{si } 0 < y \leq a^2 \\ 1 & \text{si } y \geq a^2 \end{cases}$

d'où $g(y) = G'(y) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y \leq a^2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

De même, pour $Z = \sqrt{X}$

Soit $z \geqslant 0$ $\quad H(z) = P(Z \leqslant z)$

$$= P(X \leqslant z^2)$$

$$= F(z^2)$$

donc $h(z) = 2z\,F'(z^2) = 2z\,f(z^2)$

d'où $h(z) = \begin{cases} \dfrac{2z}{a} & \text{si } 0 < z \leqslant \sqrt{a} \\ 0 & \text{; ailleurs.} \end{cases}$