Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan

Année universitaire : 2018/2019
S.M.A. Semestre 6

T.D. de Probabilités 2
Série n° 3

Exercice 1 :
Soit X une v.a. discrète de loi donnée par : $P(X = j) = p_j; j = 0, 1, 2, \cdots$ et on donne $P(X > j) = q_j; j = 0, 1, 2, \cdots$. On considère $Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$; en tenant compte que la série de somme $Q(s)$ converge pour $|s| < 1$.

1. Montrer que $Q(s) = \frac{1-G(s)}{1-s}$ pour $|s| < 1$ où $G(s)$ est la fonction génératrice de X.
2. Trouver la moyenne et la variance de X en fonction de Q et ses dérivées.

Exercice 2 :
Trouver la fonction génératrice des moments sachant que les moments de la distribution sont données par $m_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3 :
Soient les fonctions de densité :

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Trouver les fonctions caractéristiques, les fonctions génératrices des moments et les moments puis calculer les quatre premiers moments centrés

Exercice 4 :
Démontrer que l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X suivant une loi hypergéométrique de paramètres n, a et b sont égales respectivement à

$$E(X) = \frac{na}{a+b};$$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Exercice 5 :
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, majorer la probabilité pour que la variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ s'écarte de μ à moins de 3σ.

Exercice 6 :
Trouver les lois correspondantes aux fonctions caractéristiques suivantes :

1. $\varphi_1(t) = \exp\left(e^{it} - 1\right)$
2. $\varphi_2(t) = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^4$