Simulation des variables aléatoires (Révision)

Prof. Mohamed El Merouani
https://elmerouani.jimdo.com
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

1

Méthode d'inversion:

- Méthode d'inversion peut s'appliquer facilement à des lois comme l'uniforme, l'exponentielle, de Weibull, de Cauchy…etc. il suffit de trouver explicitement F^{-1}.
- Remarquons que cela n'est pas suffisant, par exemple, pour d'autres lois comme la loi bêta.
- Parfois, nous disposons d'une bonne approximation de F^{-1}, d'où on peut utiliser la méthode par approximation.

2

Exercice 1:

Écrire des algorithmes pour simuler par inversion les lois suivantes:

1. Uniforme sur un intervalle (a,b)
2. Weibull de paramètres (α,1)
3. Exponentielle de paramètre λ>0

3

Méthode d'inversion-Exemples:

1. Simulation d'une v.a. $\mathcal{U}(a,b)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\; a \leq x < b \\ 1 & si\; x \geq b \end{cases}$$

Dans le schémas général, il suffit de faire:

$$X=F^{-1}(U)=a+(b-a)U$$

4

Méthode d'inversion-Exemples:

2. Simulation d'une v.a. de Weibull $\mathcal{W}(\alpha,1)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\; x<0 \\ 1-\exp\left(-x^{\alpha}\right) & si\; x\geq 0 \end{cases}$$

Nous faisons $X=F^{-1}(U)=\left[-Ln(1-U)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$

ou bien $X=\left[-Ln\,U\right]^{\frac{1}{\alpha}}$ puisque $(1-U)\rightarrow\mathcal{U}(0,1)$

5

Méthode d'inversion-Exemples:

3. Simulation d'une v.a. exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\; x<0 \\ 1-\exp\left(-\lambda x\right) & si\; x\geq 0 \end{cases}$$

Nous faisons $X=F^{-1}(U)=\left[-\frac{Ln(1-U)}{\lambda}\right]$

Ainsi pour générer un n-echantillon selon une $\mathcal{E}xp(\lambda)$ on pose puisque $(1-U)\rightarrow\mathcal{U}(0,1)$

$$\left(X_1,\cdots,X_n\right)=\left(-\frac{Ln\,U_1}{\lambda},\cdots,-\frac{Ln\,U_n}{\lambda}\right)$$

6

Méthode du rejet:

- Pour la méthode d'inversion, il convient de savoir la fonction de répartition. Parfois, on connaît la fonction de densité, mais pas la fonction de répartition; comme il arrive, par exemple, dans le cas de la loi normale.
- Dans quelques uns de ces cas, on peut utiliser la méthode de rejet, introduite par Von Neumann (1951).

7

Méthode du rejet:

- Supposons que nous voulons échantillonner à partir d'une v.a. X avec fonction de densité f.
- Nous ne savons pas le faire directement, mais nous disposons d'un procédé pour échantillonner à partir d'une fonction de densité g telle que $f(x) \leq c\ g(x)$ pour tout x (avec c finie).
- La méthode du rejet suggère:

8

Méthode du rejet:

- **Algorithme du rejet:**

  Jusqu'où $U \leq f(X)/c\, g(X)$

  Générer $X \rightarrow g$

  Générer $U \rightarrow \mathcal{U}(0,1)$

  Sortir X
- La méthode du rejet est équivalente à générer des valeurs $Y \rightarrow \mathcal{U}(0, c\, g(X))$ et les accepter si $Y \leq f(X)$.

9

Exercice 2:

- Soit la fonction de densité d'une loi bêta (3,4)

$$f(x)=60x^2(1-x)^3; \qquad 0<x<1$$

1. Donner l'algorithme de simulation de cette loi par la méthode de rejet.
2. Quel est le nombre moyen d'itérations jusqu'à l'acceptation?
3. Quelle est l'efficacité?

10

Exemple (Simulation d'une v.a. beta $\mathcal{B}(3,4)$):

- Sa fonction de densité

$$f(x) = 60x^2(1-x)^3; \quad 0 < x < 1$$

- Prenons comme fonction g la densité d'une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$.
- Déterminons une constante c telle que $f \leq c$ g.
- Le maximum de la fonction $f(x)$/ g(x) est atteint en x=2/5.

11

Exemple (Simulation d'une v.a. beta $\mathcal{B}(3,4)$):

- Ainsi,

$$\frac{f(x)}{h(x)} \leq 60\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{1296}{625} \equiv c$$

- Donc, $\frac{f(x)}{ch(x)} = \frac{3125}{108}x^2(1-x)^3$

12

Exemple (Simulation d'une v.a. beta $\mathcal{B}$(3,4)):

- L'algorithme du rejet devient,

Jusqu'où $U_2 \leq \frac{3125}{108} U_1^2 (1-U_1)^3$

Générer U_1, $U_2 \rightarrow \mathcal{U}(0,1)$

Sortir X

13

Exemple (Simulation d'une v.a. beta $\mathcal{B}$(3,4)):

- Le nombre moyen d'itérations jusqu'à l'acceptation est c=2,07
- L'efficacité est 1/c=0,48
- Remarquons que, en fait, il n'est pas nécessaire de connaître f. Il suffit d'utiliser une fonction $f_1 \propto f$ et une borne supérieure a du quotient f_1/g.

14

Logiciel R:

- Si X est un vecteur Gaussien, la fonction de R mvnorm du package mtvnorm génère des vecteurs aléatoires…
- Essayez:

```
x<-matrix(c(rnorm(100,0,1),runif(100,0,1),ncol=3))
```

#simuler un vecteur x dont les lois marginales sont gaussiennes et uniformes respectivement.

15

Exercice 3:

- Construire un vecteur simul1 composé de 1000 éléments dont les valeurs sont des réalisations d'une var X ->N(15,3).
- Faire l'histogramme des fréquences de simul1 et supposer la densité à X

16

Solution:

- On fait:

  simul1=rnorm(1000,15,sqrt(3))

  hist(simul1, col=3,prob=TRUE,ylim=c(0,0.25), main=”Histogramme de rnorm(1000,15,sqrt(3)) et \n densité associée à la loi N(15,3)”)

  curve(dnorm(x,15,sqrt(3)),col=4,add=TRUE)

17