

Simulation des processus stochastiques

Prof. Mohamed El Merouani

2018/2019

- Rappels sur les Processus stochastiques
- Processus de Markov
- Chaînes de Markov
- Processus de Poisson
- Processus de renouvellement
- Processus stochastiques Gaussiens
- Mouvement Brownien ou processus de Wiener

Processus stochastiques :

Rappels :

- Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.
- Un processus stochastique est une famille de v.a. $\{X(t), t \geq 0\}$ indexée par le paramètre temps.
- Les valeurs que prend le processus s'appellent des *états* et leur ensemble S s'appelle *espace d'états*.
- L'ensemble des valeurs possibles de t s'appelle *espace de temps*, qui peut être discret ou continu. Lorsqu'il est discret, on note le temps par n et nous représentons le processus par $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Processus stochastiques :

Rappels :

- Si on fixe t , $X(t)$ est une variable aléatoire.
- Pour avoir une description complète du processus, la distribution conjointe des variables aléatoires de la famille $\{X(t), t \in T\}$ est nécessaire.
- Lorsque t est continu, obtenir une telle distribution conjointe sera impossible, en général. Dans ces circonstances, on suppose que le comportement du processus s'obtient en l'étudiant sur tout ensemble discret du temps et en définissant une distribution conjointe sur cet ensemble, c'est-à-dire, pour (t_1, t_2, \dots, t_n) avec $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, on donne $P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n)$ qui a sa forme la plus simple si les v.a. sont indépendantes.
- Mais, dans la majorité des situations pratiques, existe une sorte de dépendance entre ces variables aléatoires.

Processus stochastiques :

Rappels :

- Même si nous nécessitons une distribution conjointe de la forme antérieure, la plus grande partie de l'information nécessaire dans la pratique peut s'extraire des *fonctions de transitions*.
- Ces dernières sont des distributions de probabilité conditionnelles basées sur une information disponible du processus stochastique relative à une valeur spécifique du paramètre t .
- Soient $t_0, t_1 \in T$ tels que $t_0 \leq t_1$. On définit la *fonction de distribution de transition conditionnelle* comme

$$F(x_0, x_1; t_0, t_1) = P(X(t_1) \leq x_1 / X(t_0) \leq x_0)$$

Processus stochastiques :

Rappels :

- Si le processus stochastique a un espace de temps et d'états discrets, les *probabilités de transition* seront $P_{ij}^{(m,n)} = P(X_n = j / X_m = i)$.
- Un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ est dit *homogène* dans le temps si la fonction de distribution de transition dépend seulement des différences $t_1 - t_0$.
- Dans ce cas, $F(x_0, x; t_0, t_0 + t) = F(x_0, x; 0, t) \forall t_0 \in T$.
- Par convention, on écrit l'expression antérieure comme $F(x_0, x; t)$.
- Analogiquement, pour le processus discret $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ nous utiliserons l'expression $P_{ij}^{(n)}$.

Processus de Markov :

Rappels :

La forme la plus simple de dépendance entre les v.a. dans un processus stochastique est la markovienne. Considérons un ensemble des instants $\{t_0, t_1, \dots, t_n, t\}$ tel que $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$ et $t, t_i \in T$, où T est l'espace du temps. Un processus $\{X(t), t \in T\}$ est dit *markovien* ou *de Markov* si la distribution de $X(t)$ conditionnée par les valeurs $X(t_1), \dots, X(t_n)$ dépend seulement de $X(t_n)$, c'est la valeur la plus récente du processus,

$$\begin{aligned} P(X(t) \leq x / X_n(t_n) \leq x_n, X_{n-1}(t_{n-1}) \leq x_{n-1}, \dots, X_0(t) \leq x_0) = \\ = P(X(t) \leq x / X_n(t_n) \leq x_n) = F(x_n, x; t_n, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Comme conséquence de la propriété antérieure, nous obtenons la relation

$$F(x_0, x; t_0, t_0 + t) = \int_{y \in S} F(y, x; \tau, t) dF(x_0, y; t_0, \tau) \quad (2)$$

avec $t_0 < \tau < t$.

Processus de Markov :

Rappels :

Si le processus stochastique a un espace des états et du temps discrets, alors (1) et (2) prennent la forme suivante : Pour $n > n_1 > \dots > n_k$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_n = j / X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_k} = i_k) &= \\ &= P(X_n = j / X_{n_1} = i_1) = P_{i_1 j}^{(n_1, n)} \end{aligned} \quad (3)$$

En utilisant cette propriété et que $m < r < n$, on obtient

$$P_{ij}^{(m, n)} = P(X_n = j / X_m = i) = \sum_{k \in S} P(X_n = j / X_r = k) P(X_r = k / X_m = i) \quad (4)$$

Les équations (2) et (4) s'appellent Les équations de *Chapman-Kolmogorov*.

Processus de Markov :

Rappels :

Suivant la nature de l'espace des états et l'espace du temps, les processus de Markov se divisent en quatre catégories comme indiqué dans le tableau en-bas :

Espace de temps	Espace des états	
	Discret	Continu
Discret	Chaîne de Markov discrète	Processus de Markov discret
Continu	Chaîne de Markov continue	Processus de Markov continu

Chaînes de Markov :

Temps discret :

Considérons maintenant les chaînes de Markov en temps discret.

Soit

$$P_{ij}^{(m,n)} = P(X_n = j / X_m = i), m \leq n$$

qui est la probabilité de que l'état du processus dans l'instant n soit j , sachant qu'il était i à l'instant m . Si $n = m + 1$, on aura

$$P_{ij}^{(m,m+1)} = P(X_{m+1} = j / X_m = i)$$

qui est connue comme la probabilité de transition d'une étape.

On considère deux cas : (a) $P_{ij}^{(m,m+1)}$ dépend de m et (b) $P_{ij}^{(m,m+1)}$ est indépendante de m . Si (b) est vérifiée, on dit que la chaîne est homogène. Dans ce cas, on introduit la notation

$$P_{ij} = P(X_{m+1} = j / X_m = i)$$

$$P_{ij}^n = P(X_{m+n} = j / X_m = i); \quad \text{pour tout } m.$$

Chaînes de Markov :

Temps discret :

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent comme :

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m \quad (5)$$

pour tout $n, m \geq 0$ et tout i, j .

La matrice des probabilités de transition en n étapes se note $\mathbf{P}^{(n)}$ et ses éléments sont P_{ij}^n .

L'équation (5) s'écrit, donc, $\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}$.

Chaînes de Markov :

Temps discret-Classification des états :

- Un état j est dit *accessible* depuis un état i si $P_{ij}^n > 0$. Si deux états sont accessibles entre eux, on dit qu'ils communiquent et se trouvent dans la même classe.
- Une chaîne de Markov est *irréductible* si elle a seulement une classe de communication, c'est-à-dire, si tous les états se communiquent entre eux.
- Étant donné un état i , soit p_i la probabilité que si l'on commence depuis i , le processus retourne à cet état. L'état i est *récurrent* si $p_i = 1$ et *transitoire* si $p_i < 1$. Si l'état i est récurrent et communique avec un autre état j , alors j est aussi récurrent.
- Un état i admet k pour période si $P_{ii}^n = 0$ toujours que n ne soit divisible par k et k est le plus grand entier avec cette propriété. Un état avec période 1 est dit *apériodique*. Cette propriété est une propriété de classe, c'est-à-dire, si i admet k pour période et les états i et j communiquent, alors l'état j admet aussi k pour période.

Chaînes de Markov :

Temps discret-Classification des états :

- Un état i est dit *récurrent positif* si en commençant en i , le temps espéré jusqu'à ce que le processus retourne à i est fini. Cette propriété est aussi une propriété de classe. On peut démontrer qu'en une chaîne de Markov avec un nombre fini d'états, tous les états sont récurrents positifs. Si un état est récurrent et aperiodique, il est dit *ergodique*. Un résultat relatif aux probabilités limites d'une chaîne de Markov est le suivant :

Théorème :

Pour une chaîne de Markov ergodique et irréductible, il existe

$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$, qui est indépendante de i .

π_j est la solution unique non négative de $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$, $j \geq 0$, avec $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$.

Chaînes de Markov en temps discret :

Simulation :

Nous voulons simuler une chaîne de Markov avec espace des états S et matrice de transition $\mathbf{P} = (p_{ij})$, où $p_{ij} = P(X_{n+1} = j / X_n = i)$. La forme évidente de simuler la $(n + 1)^{\text{ième}}$ transition, sachant X_n , est

$$\text{Générer } X_{n+1} \sim \{p_{x_n j} : j \in S\}$$

Il peut être intéressant d'introduire des tables d'alias pour les lignes de \mathbf{P} , au moins pour les états les plus visités, si S est grand. Une possibilité est de construire les tables de la première visite à S . Un inconvénient possible de cette approximation est qu'il se peut arriver que $X_n = X_{n+1}$, avec lequel un certain effort de calcul informatique se perd. Alternativement, on peut simuler T_n , le temps jusqu'à le changement suivant d'état et, après, le nouveau état X_{n+T_n} .

Chaînes de Markov en temps discret :

Simulation :

Si $X_n = s$, T_n suit une loi géométrique de paramètre p_{ss} et X_{n+T_n} aura une loi discrète de fonction de masse $\{p_{sj}/(1 - p_{ss}) : j \in S - \{s\}\}$. Si nous souhaitons échantillonner N transitions de la chaîne, nous faisons, en supposant $X_0 = i_0$,

Faire $t = 0, X_0 = i_0$

Tant que $t < N$

Générer $h \sim Ge(p_{x_t x_t})$

Générer $X_{t+h} \sim \{p_{x_t j}/(1 - p_{x_t x_t}) : j \in S - \{x_t\}\}$

Faire $t = t + h$

Comme avant, on peut utiliser les tables d'alias pour les distributions discrètes correspondantes.

Chaînes de Markov en temps discret :

Simulation :

La première forme de simuler une chaîne de Markov correspond à une stratégie synchrone, dans laquelle le temps de simulation avance en des instants égaux.

La deuxième forme correspond à une stratégie asynchrone, dans laquelle le temps simulation avance jusqu'au l'évènement suivant ou changement d'état.

Généralement, la deuxième stratégie est plus efficace, même si son implémentation est plus compliquée.

Chaînes de Markov :

Temps continu :

- On décrit uniquement le cas homogène, le passage au cas non-homogène peut se faire facilement.
- Les chaînes de Markov en temps continu sont des processus stochastiques avec espace des états discret et espace du temps continu tels que lorsqu'un état entre en i , le temps de rester en cet état est exponentiel de paramètre v_i , et lorsqu'il le quitte, il le fait vers l'état j avec probabilité P_{ij} et $\sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$.

Chaînes de Markov :

Temps continu :

Soit P_i la distribution de l' $i^{\text{ème}}$ ligne. Alors, supposons que $X_0 = i_0$ et souhaitons simuler jusqu'à l'instant T , nous pouvons utiliser l'algorithme :

```
Faire  $t = 0, X_0 = i_0, j = 0$   
  Tant que  $t < T$   
    Générer  $t_j \sim \text{Exp}(v_{X_j})$   
    Faire  $t = t + t_j$   
    Faire  $j = j + 1$   
    Générer  $X_j \sim P_{X_{j-1}}$ 
```

De nouveau, on peut utiliser les tables d'alias pour générer X_j .

Autres processus stochastiques :

Processus de Poisson :

Supposons que $\{X(t)\}$ décrit le nombre des évènements jusqu'à le temps t et satisfait les propriétés suivantes :

- 1 Les nombres des évènements se produisent dans des intervalles de temps qui ne se chevauchent pas et sont indépendants.
- 2 Il existe une constante λ telle que les probabilités d'occurrence des évènements dans un petit intervalle de durée Δt sont données par :

$$P(\text{nombre des évènements dans } (t, t + \Delta t] = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

$$P(\text{nombre des évènements dans } (t, t + \Delta t] > 1) = o(\Delta t).$$

Alors, $X(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ , vérifiant que $X(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

On démontre que les intervalles de temps entre les évènements consécutifs sont des v.a. i.i.d. de distribution $\mathcal{Exp}(\lambda)$

Processus de renouvellement :

Soit $\{X(t)\}$ un processus qui décrit le nombre des événements d'un phénomène à étudier. On dit que c'est un *processus de renouvellement* si les intervalles de temps entre occurrences consécutives des événements sont des v.a. i.i.d., c'est-à-dire, si $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ sont les instants dans lesquels arrivent ces événements et $t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}, \dots$ sont v.a. i.i.d. L'étude de son comportement se simplifie considérablement, et s'applique, par exemple, dans la méthode régénérative.

On démontre que le processus de Poisson est un processus de renouvellement.

Le processus de Poisson est un processus de Markov avec temps continu, $v_i = \lambda$ et $P_{i,i+1} = 1, \forall i$. Donc le schéma de simulation vu pour un processus de Markov avec temps continu reste valable à des modifications près. Autre possibilité est d'utiliser une description alternative du processus de Poisson. Nous savons qu'un processus de Poisson de paramètre λ , le nombre des événements N_T dans un intervalle $(0, T)$ suit une loi de Poisson de paramètre λT et les N_T événements suivent une loi uniforme sur $(0, T)$. Ainsi, nous avons le procédé :

Générer $N_T \sim \mathcal{P}(\lambda T)$

Générer $U_1, \dots, U_{N_T} \sim \mathcal{U}(0, T)$

Un procédé similaire nous permet d'échantillonner à partir d'un processus de Poisson non-homogène, de fonction d'intensité $\lambda(t)$ et fonction de moyennes $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.

Nous faisons, alors :

Générer $N_T \sim \mathcal{P}(\Lambda(T))$

Générer $T_1, \dots, T_{N_T} \sim \frac{\lambda}{\Lambda(T)} I_{[0, T]}$

Un autre procédé pour le processus de Poisson non-homogène, généralement plus efficient, est celui de l'inversion, tout en supposant que l'on a l'inverse $\Lambda^{-1}(t)$ de la moyenne. Si $\{S_n\}$ désigne les temps d'occurrence d'un processus de Poisson homogène de taux 1 ($PP(1)$), nous faisons :

Générer $\{S_n\} \sim PP(1)$

Générer $T_n = \Lambda^{-1}(S_n)$

Les processus de Poisson ce sont un cas particulier des processus de renouvellement. La méthode de simulation des premiers, peut s'étendre pour simuler les deuxièmes.

Soient $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$ les temps d'occurrence et $T_i = S_i - S_{i-1}$ les temps entre événements. Pour un processus de renouvellement, les T_i sont i.i.d. suivant une certaine loi τ . Nous avons, alors, cette forme de les simuler jusqu'à l'instant T .

Faire $S_0 = 0, i = 0$

Tant que $S_i < T$

Générer $T_i \sim \tau$

Faire $S_i = T_i + S_{i-1}$

Faire $i = i + 1$

Exemple de simulation sous R d'un processus de Poisson avec un nombre de sauts fixé :

```
# Afficher la trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 2$ 
jusqu'au 10ième saut.
# On pourra définir ou utiliser les fonctions PoissonSaut et stepfun.
>PoissonSaut<-function(n,lambda)
+ {
+   cumsum(rexp(n,lambda))
+ }
> n<-10
>lambda<-2
>t<-PoissonSaut(n,lambda)
>z<-seq(0,n,by=1)
>F<-stepfun(t,z)
>plot(F, verticals= FALSE, ann=FALSE, col= "red")
```


Exemple de simulation sous R d'un processus de Poisson avec un nombre de sauts fixé :

```
>title(main=paste("Exemple de trajectoire d'un processus de  
Poisson", "\nd'intensité lambda=",lambda,"jusqu'au",n,"ème  
saut",sep=" "), col.main="black", font.main=4)  
>title(xlab="temps")
```

Les idées décrites pour les chaînes de Markov en temps discret s'étendent au cas de simulation des processus de Markov en temps discret. Si le processus est définie par

$$P(X_{n+1} \in A / X_n = x) = \int_A p(x, y) dy$$

alors, nous avons la forme suivante de générer l'état $(n + 1)$ ^{ième}, sachant X_n ,

Générer $X_{n+1} \sim p(X_n, \cdot)$

Le processus Gaussien a un espace des états et du temps continu. Considérons un processus stochastique $\{X(t)\}$ qui vérifie la propriété de que pour un ensemble arbitraire de n instants $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ la distribution conjointe de $X(t_r), r = 1, 2, \dots, n$ est normale n -variée. Alors, le processus est dit Gaussien. Si, en plus, pour n'importe quel ensemble fini des instants $\{t_r\}, r = 1, 2, \dots$, les v.a. sont mutuellement indépendantes et $X(t)$ a une distribution normale pour tout t , alors il est dit *processus Gaussien purement aléatoire*.

Le mouvement Brownien est un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$, avec espace des états et du temps continu, et vérifiant les propriétés suivantes :

- 1 Il a des accroissements stationnaires indépendantes, c'est-à-dire, pour $t_1, t_2 \in T$ et $t_1 < t_2$, la distribution de $X(t_2) - X(t_1)$ est la même que celle de $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ pour n'importe quelle $h > 0$ et n'importe quels intervalles de temps
- 2 Pour n'importe quel intervalle du temps (t_1, t_2) , la variable $X(t_2) - X(t_1)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t_2 - t_1))$.

La simulation des processus (non ponctuels) d'espace temps continu est plus compliquée. Une possibilité est de simuler le processus en assez d'instants discrets et d'approximer la trajectoire correspondante par interpolation. Par exemple, considérons la simulation des trajectoires du mouvement Brownien de paramètre σ . Dans ce cas, nous avons :

- $X_0 = 0$
- Pour $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$, les v.a. $X_{t_1} - X_{s_1}, \dots, X_{t_n} - X_{s_n}$ sont indépendantes
- Pour $s < t$, $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, (t - s)\sigma^2)$
- Les trajectoires sont continues

Simulation d'un mouvement Brownien

Alors, on peut faire, pour Δt fixe,

Faire $X_0 = 0$

Depuis $i = 1$ jusqu'à n

 Générer $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Delta t)$

 Faire $X_{i\Delta t} = X_{(i-1)\Delta t} + Y_i$

Inpterpoler une trajectoire en $\{(i\Delta t, X_{i\Delta t})\}$

Il existe bien d'autres exemples de génération des processus Markoviens en temps continu.

Simulation d'une trajectoire d'un mouvement Brownien sous R :

On considère un mouvement Brownien $\{X(t)\}$ ou $t \in [0, 1]$. On commence par discrétiser l'intervalle de temps $[0, 1]$ en 501 points équidistant. On utilise ensuite la propriété des accroissements Gaussiens pour simuler chaque accroissement. La fonction *cumsum* calcule les sommes cumulées et permet de générer une trajectoire. Le code sous R vient comme :

```
# Simulation d'un mvt Brownien
# discretisation du temps
>temps=seq(0,1,length=501)
>pas.temps=1/500
# Simulation des accroissements
>B.acc=rnorm(500,sd=sqrt(pas.temps))
# Simulation d'une trajectoire
>B.sim=c(0,cumsum(B.acc)) >plot(temps,B.sim,type="l",
xlab="Temps")
```

```
# L'option type="l" relie les points entre eux
```

Simulation de la trajectoire moyenne des mouvements Browniens :

Nous allons simulé maintenant 300 trajectoires indépendantes de mouvements Browniens et souhaitons vérifier que la trajectoire moyenne empirique est proche de 0. Voici le code sous R :

```
>n.sim=300 # Nombre de trajectoires
>n.point=201# Points de discretisation
>temps=seq(0,1,length=n.point)
>pas.temps=1/(n.point-1)
>B.acc=matrix(rnorm((n.point-1)*n.sim,sd=sqrt(pas.temps)),nrow=
>B.sim=matrix(NA,ncol=n.point,nrow=n.sim)
>for (i in 1:n.sim)
B.sim[i,]=c(0,cumsum(B.acc[i,]))
>dim(B.sim)## [1] 300 201
>B.mean=apply(B.sim,2,mean) ### apply calcule la moyenne
pour chaque colonne
```


Simulation de la trajectoire moyenne des mouvements Browniens :

```
>plot(temps,B.sim[1,],xlab="temps",type="l", ylab="Mouvement  
Brownien", ylim=c(-2,2))  
>title("Un échantillon de 15 trajectoires")  
>for (i in 1:15)lines(temps,B.sim[i+1,])  
>lines(temps,B.mean,lwd=2,col="red")  
>legend(0.1,-1.5,c("Trajectoire moyenne"),  
col=c("red"),lwd=2)
```