Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan

Année universitaire : 2018/2019
S.M.A. Semestre 6

T.D. de Probabilités 2
Série n° 3

Exercice 1 :
Soit X une v.a. discrète de loi donnée par : $P(X = j) = p_j; j = 0, 1, 2, \cdots$ et on donne $P(X > j) = q_j; j = 0, 1, 2, \cdots$. On considère $Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$; en tenant compte que la série de somme $Q(s)$ converge pour $|s| < 1$.

1. Montrer que $Q(s) = \frac{1-G(s)}{1-s}$ pour $|s| < 1$ où $G(s)$ est la fonction génératrice de X.
2. Trouver la moyenne et la variance de X en fonction de Q et ses dérivées.

Exercice 2 :
Trouver la fonction génératrice des moments sachant que les moments de la distribution sont données par $m_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3 :
Soient les fonctions de densité :

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Trouver les fonctions caractéristiques, les fonctions génératrices des moments et les moments puis calculer les quatre premiers moments centrés

Exercice 4 :
Démontrer que l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X suivant une loi hypergéométrique de paramètres n, a et b sont égales respectivement à

$$E(X) = \frac{na}{a+b};$$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Exercice 5 :
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, majorer la probabilité pour que la variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ s'écarte de μ à moins de 3σ.

Exercice 6 :
Trouver les lois correspondantes aux fonctions caractéristiques suivantes :

1. $\varphi_1(t) = \exp\left(e^{it} - 1\right)$
2. $\varphi_2(t) = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^4$

Série n° 3

- Moments (Espérance, variance, covariance, ... etc).
- Bienaymé Tchebychev, Markov, Jensen, Shwartz
- Moments d'ordres supérieurs, couple de v.a.
- correlation
- Fonctions génératrices et Fonctions génératrices des moments

---

Ex. 1 :

Soit X une v.a. discrète de loi donnée par :

$$P(X=j)=p_j \; ; \; j=0,1,2,\dots$$

désignons par $P(X>j)=q_j \; ; \; j=0,1,2,\dots$

et $Q(s)=\sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$; en tenant compte que la série de somme $Q(s)$ converge pour $|s|<1$.

1°) Montrer que $Q(s)=\dfrac{1-G(s)}{1-s}$ pour $|s|<1$

où $G(s)$ est la fonction génératrice de X.

2°) Trouver la moyenne et la variance de X en fonction de Q et ses dérivées.

Sol. 1 :

$$G(s)=\sum_{n\geq 0} p_n s^n \qquad |s|\leq 1$$

$$Q(s)=\sum_{n\geq 0} q_n s^n \text{ qui existe pour tout } |s|<1$$

$$0<q_n\leq 1$$

1°) $(1-s)Q(s) = \left(\sum_{n\geq 0} q_n s^n\right)(1-s)$

$$= \sum_{n\geq 0} q_n s^n - \left(\sum_{n\geq 0} q_n s^n\right) s$$

$$= \sum_{n\geq 0} q_n s^n - \sum_{n\geq 0} q_n s^{n+1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} q_{n+1} s^{n+1} - \sum_{n\geq 0} q_n s^{n+1} + q_0$$

$$= \sum_{n\geq 0} (q_{n+1} - q_n) s^{n+1} + q_0$$

$$q_{n+1} - q_n = P(X > n+1) - P(X > n)$$

$$= -P(n < X \leq n+1) = -P(X = n+1) = -p_{n+1}$$

$$(1-s)Q(s) = q_0 - \sum_{n\geq 0} p_{n+1} s^{n+1} = 1 - G(s)$$

(car $q_0 = 1 - p_0$)

2°) $E(X) = G'(1)$

$$1 - (1-s)\,Q(s) = G(s)$$

$$G'(s) = -(1-s)\,Q'(s) + Q(s) \Rightarrow \boxed{E(X) = Q(1)}$$

$$G''(s) = -(1-s)\,Q''(s) + 2Q'(s) \Rightarrow G''(1) = 2Q'(1)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2 - X) + E(X) - E(X)^2$$

$$= G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

$$Var(X) = 2Q'(1) + Q(1) - [Q(1)]^2$$

Ex. 3

Soient les fonctions de densité :

a) 1°) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

b) 2°) $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Trouver les fonctions caractéristiques, les fonctions génératrices des moments et les moments puis calculer les quatres premiers moments centrés.

Sol. 3

a) Soit la fonction de densité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}\,dx = \frac{1}{(b-a)it}\left[e^{itx}\right]_a^b$$

$$= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{(b-a)\,it} = \frac{1}{(b-a)it}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\left(b^k - a^k\right)$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^{k-1}}{k!}\,\frac{b^k - a^k}{b-a} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^{k-1}}{(k-1)!}\,\frac{b^k - a^k}{(b-a)k}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$$

donc $$\boxed{m_n = E(X^n) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}}$$

$$M(s) = E\left(e^{sX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{sx} dx$$

$$= \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s(b-a)} = \frac{1}{s(b-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\left(b^k - a^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \frac{b^k - a^k}{(b-a)k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$$

Ainsi, on retrouve

$$\boxed{m_n = E(X^n) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}}$$

$$\mu_k = E\left(\left(X - E(X)\right)^k\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j \left(E(X)\right)^j X^{k-j}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j m_1^j \, m_{k-j}$$

b) Pour $$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$M(s) = E\left(e^{sX}\right) \quad \text{pour } |s| < 1$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{x(s-1)} dx = \frac{1}{s-1}\left[e^{x(s-1)}\right]_0^{+\infty}$$

$$M(s) = \frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} n!$$

donc $\boxed{m_n = n!}$

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{x(it-1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{it-1}\left[e^{x(it-1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-it} = \frac{1+it}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} + i\,\frac{t}{1+t^2}$$

pour $|t| \leq 1$, on a : $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$

et $\frac{t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1)!$

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}(2n)!}{(2n)!} + \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1)! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} n!$$

Même d'après le cours on a : $\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} m_n = \sum_0^{\infty} (it)^n$

Ex. 2

Trouver la fonction génératrice des moments sachant que les moments de la distribution sont donnés par $m_n = \frac{1}{n+1}$.

Sol. 2

on sait que $M(s) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{s^n}{n!}$

$$M(s) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{s^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n!} = \frac{1}{s}\left(e^{s}-1\right)$$

Ex. 6

Trouver les lois correspondantes aux fonctions caractéristiques suivantes :

a) $\varphi_1(t) = \exp\left(e^{it}-1\right)$

b) $\varphi_2(t) = \left(\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}\right)^4$

Sol. 6

a) Pour appliquer la formule de réciprocité de Fourier il faut que $\varphi_1(t)$ soit absolument intégrable. Mais, elle ne l'est pas. Pour cela, on applique une autre méthode.

On remarque que :

$$\varphi_1(t) = \exp\left(e^{it}-1\right) \qquad X \sim \mathcal{P}(1) \quad \text{car}$$

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \iff \varphi_X(t) = \exp\left(\lambda\left(e^{it}-1\right)\right)$$

b) $\varphi_2(t) = \left(\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}\right)^4 \sim b\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

Ex. 5

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, majorer la probabilité pour que la v.a. X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ s'écarte de μ à moins de 3σ.

Sol. 5 :

X v.a tq $E(X)$ et $Var(X)$ existent
$\forall \varepsilon > 0$ on a
$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

le cours
$\Downarrow$
avec $\varepsilon = 3\sigma$
et $E(X) = \mu$
$Var(X) = \sigma^2$

L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev implique :

$$P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{Var(X)}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

donc $$P(|X - \mu| \quad 3\sigma) \geq \frac{8}{9} \approx 0{,}888$$

Ainsi, toute v.a. s'écarte de son espérance mathématique à moins de 3σ avec une probabilité non inférieure à $\frac{8}{9}$,

C'est le cas extrême, le plus défavorable. Dans la pratique, pour les v.a qui se présentent dans les cas courants, cette probabilité est bien plus proche de l'unité ; par exemple, pour la loi normale elle est égale à 0,997 ; pour la loi uniforme, à l'unité ; pour la loi exponentielle, à 0,982.

Rappel sur la loi hypergéométrique :

On considère une urne contenant N boules dont a sont blanches et $b = N - a$ sont rouges.
On tire de cette urne n boules. (On peut tirer les n boules en même temps ou l'une après l'une sans remise).

Soit X la v.a. égale au nombre de boules blanches tirées parmi les n boules.

Cette v.a. X suit une loi dite hypergéométique et est notée $H(n, a, b)$

comme $0 \leq X \leq a$ et $0 \leq n - X \leq b$ on a :

$$\sup(0, n-b) \leq X \leq \operatorname{Inf}(a, n) \qquad \Rightarrow \quad n-b \leq X \leq n$$

Soit un nombre entier k tel que :

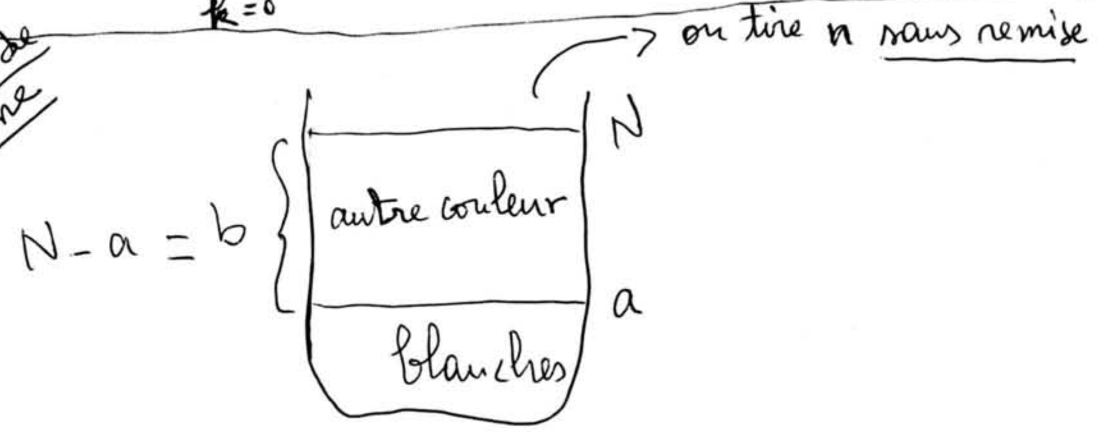
$$\sup(0, n-b) \leq k \leq \operatorname{Inf}(a, n)$$

On cherche $P(X = k)$

(dénombrement) on a : $$P(X=k) = \frac{C_a^k \, C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

comme $\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$, on a bien $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$

schéma de l'urne



Ex.4

$$E(X) = n\frac{a}{a+b}$$

En effet, $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_{k=0}^{n} k C_a^k C_b^{n-k}$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n} a \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} \text{ ; car } k C_a^k = a C_{a-1}^{k-1}$$

$$= \frac{a}{C_{a+b}^n} C_{a+b-1}^{n-1} = \frac{a\,n}{a+b} \text{ car } \sum_{k=1}^{n} C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} = C_{a+b-1}^{n-1}$$

On peut retrouver ce même résultat en considérant X comme une somme de n variables de Bernoulli X_i, $(i = 1, 2, \dots, n)$, non indépendantes (tirage avec remise) de paramètre $p = \frac{a}{a+b}$

Ces variables X_i ont même espérance mathématique $\frac{a}{a+b}$.

En effet, $E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1)$

$$= P(X_1 = 1)$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

$$E(X_2) = 0 \times P(X_2=0) + 1 \times P(X_2=1)$$

comme X_2 et X_1 ne sont pas indépendantes,

$$P(X_2=1) = P(X_2=1/X_1=1).P(X_1=1) + $$
$$+P(X_2=1/X_1=0)\cdot P(X_1=0)$$
$$= \frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b-1}\cdot\frac{b}{a+b}$$
$$= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a-1+b}{a+b-1}\right) = \frac{a}{a+b}$$

d'où $E(X_2) = \dfrac{a}{a+b}$

De même, on trouve $E(X_3) = \cdots = E(X_n) = \dfrac{a}{a+b}$

et
$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= n\frac{a}{a+b}$$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

En effet, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

et $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$; $k^2 = k(k-1)+k$

$$E(X^2) = \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[\sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_a^k C_b^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k C_a^k C_b^{n-k}}_{= E(X)}\right]$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)\sum_{k=2}^{n} C_{a-1}^{k-2} C_b^{n-k} + \frac{an}{a+b}\right]$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)\sum_{k'=0}^{n-2} C_{a-1}^{k'} C_{b-}^{n-k'-2} + \frac{an}{a+b}\right]$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)C_{a+b-2}^{n-2} + \frac{an}{a+b}\right]$$

$$= \frac{a(a-1)b(n-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{an}{a+b}$$

Comme $E(X)^2 = \left(\frac{an}{a+b}\right)^2$, on en déduit

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Autre méthode :

On peut retrouver ces mêmes résultats en considérant X comme une somme de n variables de Bernoulli X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ non indépendantes.