Corrigés de la série n° 4

Exercice 1 :
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux évènements de $\mathcal{A}$.

1. On a $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
   Alors, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
   $= P(A)P(B) + P(A \cap \overline{B})$
   Donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B)$
   $= P(A)(1 - P(B))$
   $= P(A)P(\overline{B})$
   D'où l'équivalence à démonter puisqu'on a procédé par des égalités.
2. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$
   $= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$
   $= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$
   $= P(\overline{A}) - P(B)(1 - P(A))$
   $= P(\overline{A})P(\overline{B})$
   D'où l'équivalence à démonter puisqu'on a procédé par des égalités.

Exercice 2 :
On démontre la formule par récurrence.
Pour $n = 1$; $P(A_1) = P(A_1)$
Pour $n = 2$; $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2) = P(A_2/A_1)P(A_1)$
Supposons la formule vraie à l'ordre $(n-1)$ et on montre qu'elle est vraie à l'ordre n. On écrit :

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n)$$

$$= P(A_n/ \cap_{i=1}^{n-1} A_i).P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \cdots P(A_{n-1}/ \cap_{i=1}^{n-2} A_i)P(A_n/ \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

D'où la formule.

Exercice 3 :
On dit qu'une v.a. X à valeurs entières positives suit la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$, si $\forall k \in X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad \text{avec} \quad q = 1 - p$$

Montrons que la loi géométrique n'a pas de mémoire :

$$P(X \geqslant k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \cdots$$

$$= pq^{k-1} (1 + q + \cdots)$$

$$= \frac{pq^{k-1}}{1-q} = q^{k-1},$$

d'où

$$P(X \geqslant k+k_0/X > k_0) = \frac{P(X \geqslant k+k_0, X \geqslant k_0+1)}{P(X \geqslant k_0+1)}$$

$$= \frac{P(X \geqslant k+k_0)}{P(X \geqslant k_0+1)}, \quad (\text{car} \;\; k > 1)$$

$$= \frac{q^{k+k_0-1}}{q^{k_0}} = q^{k-1}$$

Conclusion :

$$P(X \geqslant k+k_0/X > k_0) = P(X \geqslant k)$$

Exercice 4 :
Calculons $P(Y = k)$.

$$P(Y=k) = P(\{Y=k\} \cap \Omega) = P(\{Y=k\} \cap \cup_{n=0}^{\infty}\{X=n\})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k, X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k/X=n).P(X=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{(n-k)!}$$

Changement d'indice $n-k=j$,

$$P(Y=k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{j+k}}{j!} = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \lambda^k (1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j (1-p)^j}{j!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda}}{k!} (\lambda p)^k e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$$

Donc $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 5 :
On montre que $P(X=m/X+Y=n) = C_n^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda 1+\lambda_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda 1+\lambda_2}\right)^{n-m}$
Soit $m, n \in \mathbb{Z}^+$ avec $m < n$. On a :

$$P(X=m/X+Y=n) = \frac{P(X=m, Y=n-m)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=m).P(Y=n-m)}{P(X+Y=n)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^m}{m!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}}{\sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!}} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

$$= C_n^m \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = C_n^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m} ; m = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Exercice 6 :
D'abord, on doit savoir que si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, avec X et Y deux v.a. indépendantes, alors, $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.
<u>En effet :</u>

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A P(X=a).P(X=b)$$

où $A = \{(a,b)/0 \leqslant a \leqslant n, 0 \leqslant b \leqslant m, a+b=\beta\}$.

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A C_n^a p^a (1-p)^{n-a}.C_m^b p^b (1-p)^{m-b}$$

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A C_n^a.C_m^b p^{a+b}(1-p)^{n+m-(a+b)}$$

Or $\sum_A C_n^a.C_m^b = \sum_{\beta=a+b=0}^{n+m} C_n^a.C_m^b = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a} = C_{n+m}^{\beta}$

<u>En effet :</u>
Considérons $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n.(1+x)^m$.

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$$

$$(1+x)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$$

On a donc $\sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i . \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$
En identifiant les coefficients de x^k, on peut écrire :

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{j=k-i}$$

D'où, en prenant $i=a$, $j=b$ et $k=\beta$, $C_{n+m}^{\beta} = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a}$ On en déduit que :

$$P(X+Y=\beta) = C_{n+m}^{\beta} p^{\beta}(1-p)^{n+m-\beta}$$

i.e. $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.
Calculons, maintenant, $P(X=\alpha/X+Y=\beta)$.
X et Y étant indépendantes, on peut écrire :

$$P(X=\alpha/X+Y=\beta) = \frac{P(X=\alpha, X+Y=\beta)}{P(X+Y=\beta)}$$

$$= \frac{P(X=\alpha/Y=\beta-\alpha)}{P(X+Y=\beta)}$$

$$= \frac{C_n^\alpha p^\alpha (1-p)^{n-\alpha}.C_m^{\beta-\alpha} p^{\beta-\alpha}(1-p)^{m-\beta+\alpha}}{C_{n+m}^\beta p^\beta (1-p)^{n+m-\beta}}$$

$$= \frac{C_n^\alpha C_m^{\beta-\alpha} p^\beta (1-p)^{n+m-\beta}}{C_{n+m}^\beta p^\beta (1-p)^{n+m-\beta}}$$

Soit $P(X=\alpha/X+Y=\beta) = \frac{C_n^\alpha C_m^{\beta-\alpha}}{C_{n+m}^\beta}$
On voit, donc, que la loi de X conditionnée par $X+Y=\beta$ est hypergéométrique de paramètres $n+m$, n et β (que l'on note par $\mathcal{H}(n+m,n,\beta)$).

Exercice 7 :
Considèrons la loi trinomiale :

$$P(X=x,Y=y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y},$$

$$\text{où } (x,y) \in \mathbb{Z}_+^2 \text{ et } p_j \geqslant 0 \text{ avec } p_1+p_2+p_3=1.$$

1. La loi marginale de X est donnée par :

$$P(X=x) = \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} p_1^x \sum_{y=0}^{n-x} \frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!} p_2^y p_3^{n-x-y}$$

$$= C_n^x p_1^x (p_2+p_3)^{n-x} = C_n^x p_1^x (1-p_1)^{n-x}; x=0,1,\cdots,n$$

   C'est-à-dire $X \sim \mathcal{B}(n,p_1)$.
2. La loi conditionnelle de Y par $X=x$ sera :

$$P(Y=y/X=x) = \begin{cases} \frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^y \left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x-y} & \text{si } \ y=0,1,\cdots,n-x \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

   Donc, c'est une loi $\mathcal{B}(n-x, \frac{p_2}{1-p_1})$