Conditionnement et Indépendance (2)

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

2018/2019

Transformations des vecteurs aléatoires :

Soient X et Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit :

$$(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$(XY)(\omega) = X(\omega).Y(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \text{avec} \quad \{Y = 0\} = \emptyset$$

Théorème :

$X + Y$ et XY sont des v.a.
Il en est de même de $\frac{X}{Y}$ si $\{Y = 0\} = \emptyset$.

Loi d'une somme de variables aléatoires discrètes :

La probabilité $P(Z = k)$ de la somme $Z = X + Y$ de deux v.a. X, Y est la somme des probabilités $P(X = i, Y = j)$ étendue à tous les couples (i, j) liés par la relation $k = i + j$:

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i, Y = j)$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, on a :

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i).P(Y = j)$$

On lance deux dés. On veut déterminer la distribution de la somme des résultats.
Soient X et Y les v.a. correspondantes aux résultats du premier et second dé respectivement. On a :

$$P(X = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \cdots, 6$$

$$\text{et} \quad P(Y = j) = \frac{1}{6}, \quad j = 1, 2, \cdots, 6$$

La distribution de Z est :

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i, Y = j)$$

Comme les deux résultats sont indépendantes, on a :

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i).P(Y = j)$$

La v.a. Z prend les valeurs $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ et 12 avec les probabilités :
$P(Z=2) = P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$,
$P(Z=3) = P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1) = \frac{2}{36}$,
$P(Z=4) = P(X=1)P(Y=3) + P(X=2)P(Y=2) +$
$+P(X=3)P(Y=1) = \frac{3}{36}$.
De la même façon, on trouve : $P(Z=5) = \frac{4}{36}$, $P(Z=6) = \frac{5}{36}$,
$P(Z=7) = \frac{6}{36}$, $P(Z=8) = \frac{5}{36}$, $P(Z=9) = \frac{4}{36}$, $P(Z=10) = \frac{3}{36}$,
$P(Z=11) = \frac{2}{36}$, $P(Z=12) = \frac{1}{36}$.
On en tire le tableau :

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Somme de deux v.a. binomiales :

Soient deux v.a. X_1 et X_2 indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

On a :

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_A P(X_1 = i, X_2 = j)$$

$$\text{où } A = \{(i,j)/0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_2, i + j = k\}$$

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_A P(X_1 = i)P(X_2 = j)$$

$$= \sum_A C_{n_1}^i p^i (1-p)^{n_1 - i} C_{n_2}^j p^j (1-p)^{n_2 - j}$$

$$= \sum_A C_{n_1}^i C_{n_2}^j p^{i+j} (1-p)^{n_1 + n_2 - i - j}$$

Somme de deux v.a. binomiales :

Or $\sum_A C_{n_1}^i C_{n_2}^j = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1}^i C_{n_2}^j = C_{n_1+n_2}^k$, d'où

$$P(X_1 + X_2 = k) = C_{n_1+n_2}^k p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$$

On peut énoncer ce résultat plus simplement en affirmant que $X_1 + X_2$ est la somme de $n_1 + n_2$ variables de Bernoulli de même paramètre p. C'est donc bien une variable binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = n_1 + n_2$.

Somme de deux v.a. suivant une loi de Poisson :

Soient deux v.a. X et Y indépendantes suivant toutes les deux une loi de Poisson de paramètre λ. La variable aléatoire $Z = X + Y$ suit aussi une loi de Poisson de paramètre 2λ.

En effet, $P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i)$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\lambda^{k-i}}{i!(k-i)!}$$

$$= e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{k} C_k^i\frac{\lambda^i\lambda^{k-i}}{k!} = \frac{e^{-2\lambda}}{k!}(\lambda + \lambda)^k$$

$$= (2\lambda)^k\frac{e^{-2\lambda}}{k!}$$

Loi d'une somme de deux variables aléatoires continues :

Soit $Z = X + Y$. On veut déterminer la fonction de répartition de v.a. Z. On a : $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int\int_A f(x,y)dxdy$ où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq z\}$.
Si X et Y sont indépendantes, on a :

$$F_Z(z) = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\right]f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x)f_X(x)dx$$

On peut trouver de la même façon : $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y)f_Y(y)dy$.
En dérivant $F_Z(z)$ par rapport à z, on trouve
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$ ou encore
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx$.

Loi d'une somme de deux variables aléatoires continues :

Exemple :

Soient deux v.a. indépendantes X et Y qui ont pour densité de probabilité respective :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

1. Trouver la fonction de répartition $F(x, y)$ du couple (X, Y)
2. Trouver la densité de probabilité de la somme $Z = X + Y$

Solution :

(1) On a : $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv = \int_0^x \int_0^y \lambda\mu e^{-\lambda u - \mu v} du dv$

$$= \left(1 - e^{-\lambda x}\right) . \left(1 - e^{-\mu y}\right)$$

et $F(x, y) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) . \left(1 - e^{-\mu y}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(2) La densité de Z s'écrit : $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx =$

$$= \int_{\substack{x \geq 0 \\ z-x \geq 0}} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(z-x)} dx$$

Si $z \geq 0$, on a : $f_Z(z) = \int_0^z \lambda\mu e^{-\mu z} e^{-(\lambda-\mu)x} dx = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}\right)$.

Pour $\lambda \neq \mu$, $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}\right) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$

Pour $\lambda = \mu$, $f_Z(z) = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, si $z \geq 0$ et on a, donc :

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Loi de la somme de deux v.a. suivant des lois normales :

Soient X_1 et X_2 deux v.a. suivant des lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ respectivement. La v.a. $X_1 + X_2$ suit, alors, aussi une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

On montre ce résultat pour les v.a. $Z_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}$ et $Z_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$ qui suivent toutes les deux une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. La densité de $Z = Z_1 + Z_2$ s'écrit : $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx - x^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x - \frac{z}{2}\right)^2} dx.$$

En posant $x - \frac{z}{2} = u$, on a : $f(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} =$ $= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2}}$, qui est la densité d'une v.a. suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$.

Loi de la somme de plusieurs v.a. suivant des lois normales :

Remarque :

Ce résultat peut être généralisé à la somme de plusieurs v.a. $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ i.i.d. suivant des lois $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2})$$

Soient deux v.a. X et Y absolument continues. La densité de probabilité du couple (X, Y) est $f(x, y)$. On considère la transformation $\left\{\begin{array}{lll} U & = & U(X,Y) \\ V & = & V(X,Y) \end{array}\right.$ et la transformation inverse $\left\{\begin{array}{lll} X & = & X(U,V) \\ Y & = & Y(U,V) \end{array}\right.$
La fonction de densité de probabilité du couple (U, V) est :

$$g(u,v) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = f\left[x(u,v), y(u,v)\right]|J|$$

où J est le déterminant de Jacobi (ou le Jacobien) :

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Changement de variables

Exemple 1 :

À l'aide de la formule précédente, on peut retrouver la formule de calcul de la densité de probabilité de $Z = X + Y$ où X et Y sont deux v.a. indépendantes absolument continues.

en effet, comme on a $f(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$ et en considérant la transformation $\begin{cases} x = x \\ z = x + y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = x \\ y = z - x \end{cases}$, on obtient :

$g(x, z) = f(x, z - x)|J| = f_X(x)f_Y(z - x)$ où $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

La fonction $h(z)$ densité de probabilité de Z s'écrit, donc,

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$$

Exemple 2 :

Soient X et Y deux v.a. indépendantes dont la densité de probabilité du couple (X, Y) est $f(x, y)$. Trouver la densité de probabilité de $Z = XY$

On considère la transformation $\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x \\ z & = & xy \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x \\ y & = & \frac{z}{x} \end{array} \right.$

Pour $x \neq 0$, on a : $g(x, z) = f\left(x, \frac{z}{x}\right)) \, |J|$ où $J = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ & \\ \frac{-z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{x}$.

On a donc $g(x, z) = f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) |\frac{1}{x}|$ et la densité de probabilité de Z s'écrit :

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, z) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{x}| f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx.$$

Exercice :

Soient deux v.a. X et Y dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & \text{si } 0 < x < 2 \text{ et } 1 < y < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Trouver la densité de $Z = 2X + Y$
2. Trouver la densité du couple (U, V) où $U = XY$ et $V = XY^2$.

Solution :

On considère la transformation $\left\{\begin{array}{lll} x & = & x \\ z & = & 2x+y \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lll} x & = & x \\ y & = & z-2x \end{array}\right.$

On a $g(x,z) = f(x, z-2x)|J|$ où $J = \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \\ -2 & 1 \end{array}\right| = 1$

L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 2, 1 < y < 3\}$ correspond à $B = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 2, 1 < z-2x < 3\}$.

On obtient donc $g(x,z) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{x(z-2x)}{8} & \text{si } 0 < x < 2, 1 < z-2x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array}\right.$ et la densité de Z s'écrit :

$$g(z) = \left\{\begin{array}{ll} \int_0^{\frac{z-1}{2}} \frac{x(z-2x)}{8} dx & \text{si } 1 < z < 3 \\ \int_{\frac{z-3}{2}}^{\frac{z-1}{2}} \frac{x(z-2x)}{8} dx & \text{si } 3 < z < 5 \\ \int_{\frac{z-3}{2}}^{2} \frac{x(z-2x)}{8} dx & \text{si } 5 < z < 7 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array}\right.$$

Solution :

c'est-à-dire : $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{192}(z^3 - 3z + 2) & \text{si } 1 < z < 3 \\ \frac{1}{192}(24z + 16) & \text{si } 3 < z < 5 \\ \frac{1}{192}(-z^3 + 75z - 182) & \text{si } 5 < z < 7 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

(2) Soit la transformation $\begin{cases} U & = & XY \\ V & = & XY^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X & = & \frac{U^2}{V} \\ Y & = & \frac{V}{U} \end{cases}$

L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 2, 1 < y < 3\}$ correspond à
$C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \frac{u^2}{v} < 2, 1 < \frac{v}{u} < 3\}$ où
$C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 < 2v, u < v < 3u\}$ et on a :

$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))|J|$ où $J = \begin{vmatrix} \frac{2u}{v} & \frac{-u^2}{v^2} \\ \frac{-v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$. On obtient,

donc, $g(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{8} \frac{u^2}{v} \frac{v}{u} \frac{1}{v} & \text{si } u^2 < 2v \text{ et } u < v < 3u \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ ou

$g(u, v) = \begin{cases} \frac{u}{8v} & \text{si } u^2 < 2v \text{ et } u < v < 3u \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$