Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2018/2019
Master M.A.F.
Simulation Monte-Carlo

Contrôle de la session normale

Durée: 2 heures

Exercice 1 : (2 points)
On considère la fonction de densité conjointe suivante :

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\exp(-x(1+y^2))\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$$

Donner l'échantillonnage de Gibbs associé.

Exercice 2 : (3 points)
Donner deux méthodes de Monte-Carlo différentes pour estimer l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \sin(x^4)\exp(-2x)\exp(-\frac{x^2}{2})dx$$

Exercice 3 : (3 points)
Soit X une variable aléatoire admettant pour fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}\exp(-\alpha x^{\beta}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

avec α et β des paramètres réels strictement positifs.
Proposer une méthode de simulation de cette loi et donner l'algorithme.

Exercice 4 : (4 points)
Soit Y une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On considère la variable aléatoire X discrète telle que $X = [Y]$ (où $[Y]$ est la partie entière de Y). Montrer que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre à déterminer et en déduire une méthode pour simuler la loi géométrique.

Exercice 5 : (8 points)
On veut calculer $I = E(\mathbb{I}_{(X>0)}e^{\beta X})$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\beta = 5$. On estimera la variance à chaque étape de l'exercice.

1. Calculer, par Monte-Carlo, la variance de la méthode standard.
2. Proposer une méthode d'échantillonnage préférentiel.
3. Proposer une méthode de variable de contrôle.
4. Améliorer la méthode à l'aide d'une technique de variable antithétique.

Bonne chance !