Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2018/2019
Master M.A.F.
Simulation Monte-Carlo

Contrôle de la session de rattrapage

Durée: 2 heures

Exercice 1 : (4 points)
On considère la fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1,2[\\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [2,3[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

1. Calculer F^{-1} le pseudo-inverse de F.
2. Proposer une méthode et un algorithme pour la simulation d'une variable aléatoire de fonction de répattition F.

Exercice 2 : (6 points)
On considère les fonctions suivantes définies $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{K}\mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x), \quad \text{avec} \quad K = \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Trouver une constante C telle que $f(x) \leqslant Cg(x)$, pour tout x.
2. Comment simuler une variable aléatoire de fonction de densité g ?
3. Comment simuler f par la méthode de rejet en utilisant l'inégalité de la question 1° ? Donner l'algorithme de cette méthode.

Exercice 3 : (6 points)
Soient les fonctions suivantes définies $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x), \qquad g(x) = x^2.$$

On s'intèresse à l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$.

1. Comment simuler une variable aléatoire de densité de probabilité f ?
2. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée, en utilisant la simulation de la variable aléatoire de la question précédente.
3. Proposer une méthode de réduction de variance par fonction d'importance (appelée aussi "méthode d'échantillonnage préférentiel").

Exercice 4 : (4 points)
On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale $I = \int_0^1 e^u du$.

1. Rappeler la formule de l'estimateur Monte-Carlo standard $\hat{I}_n$. Rappeler le théorème central limite auquel il obéit et calculer la variance σ^2 qu'il fait intervenir. Donner un estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ de σ^2.
2. Donner un estimateur $\tilde{I}_n$ de I à base de variables antithétiques. Quelle est sa variance théorique s^2 ?

Bonne chance !