Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

2018 - 2019
S.M.A & S.M.I
S_3

T. D. de Probabilités (corrigés)
Série n° 2

Ex. 1 :

On considère les évènements

Ω = " Personnes présentes à la réunion " ; Card $\Omega = 20$

A = " la personne fume "

F = " la personne qui assiste à la réunion est une femme "

H = " " " " un homme "

On a :

$P(H) = \frac{2}{5}$; $P(F) = \frac{3}{5}$

$P(A/H) = \frac{2}{5}$; $P(A/F) = \frac{1}{5}$

i) Théorème des probabilités totales :

$$P(A) = P(A/H) \cdot P(H) + P(A/F) \cdot P(F)$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$$

ii) Théorème de Bayes :

$$P(H/A) = \frac{P(A/H) \cdot P(H)}{P(A)} = \frac{2/5 \cdot 2/5}{7/25}.$$

$$= \frac{4}{7}$$

Ex. 2 :

On considère les évènements :

M = « l'individu est malade »

V = « l'individu est vacciné »

On a :

$P(V) = \frac{1}{4}$ donc $P(\bar{V}) = \frac{3}{4}$

$P(V/M) = \frac{1}{5}$ donc $P(\bar{V}/M) = \frac{4}{5}$

$P(M/V) = \frac{1}{12}$

On cherche la probabilité de tomber malade pour un non vacciné

c'est-à-dire $P(M/\bar{V})$?

Par le théorème de Bayes $P(M/\bar{V}) = \frac{P(\bar{V}/M) \cdot P(M)}{P(\bar{V})}$

Par le théorème des Probabilités totales :

$$P(M) = P(M/V) \cdot P(V) + P(M/\bar{V}) \cdot P(\bar{V})$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + P(M/\bar{V}) \cdot \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow P(M/\bar{V}) = \frac{4/5}{3/4}\left[\frac{1}{48} + \frac{3}{4} P(M/\bar{V})\right]$$

$$\Rightarrow \frac{15}{16} P(M/\bar{V}) = \frac{3}{4} P(M/\bar{V}) + \frac{1}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{16} P(M/\bar{V}) = \frac{1}{48}$$

$$\Rightarrow P(M/\bar{V}) = \frac{1}{9}$$

Ex.3:

1°) $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

ω	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
$X(\omega)$	-3	0	0	3	0	3	3	6

$X(\Omega) = \{-3, 0, 3, 6\}$

$(X=0) = X^{-1}(\{0\}) = \{PPF, PFP, FPP\}$

$(X=3) = X^{-1}(\{3\}) = \{PFF, FPF, FFP\}$

$(X=-3) = X^{-1}(\{-3\}) = \{PPP\}$

$(X=6) = X^{-1}(\{6\}) = \{FFF\}$

$P(X=0) = P_X(\{0\}) = P(X^{-1}(\{0\})) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = P(X^{-1}\{3\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=-3) = P(X^{-1}\{-3\}) = \frac{1}{8}$

$P(X=6) = P(X^{-1}\{6\}) = \frac{1}{8}$

On vérifie que $\sum_i P(X=i) = 1$, en effet

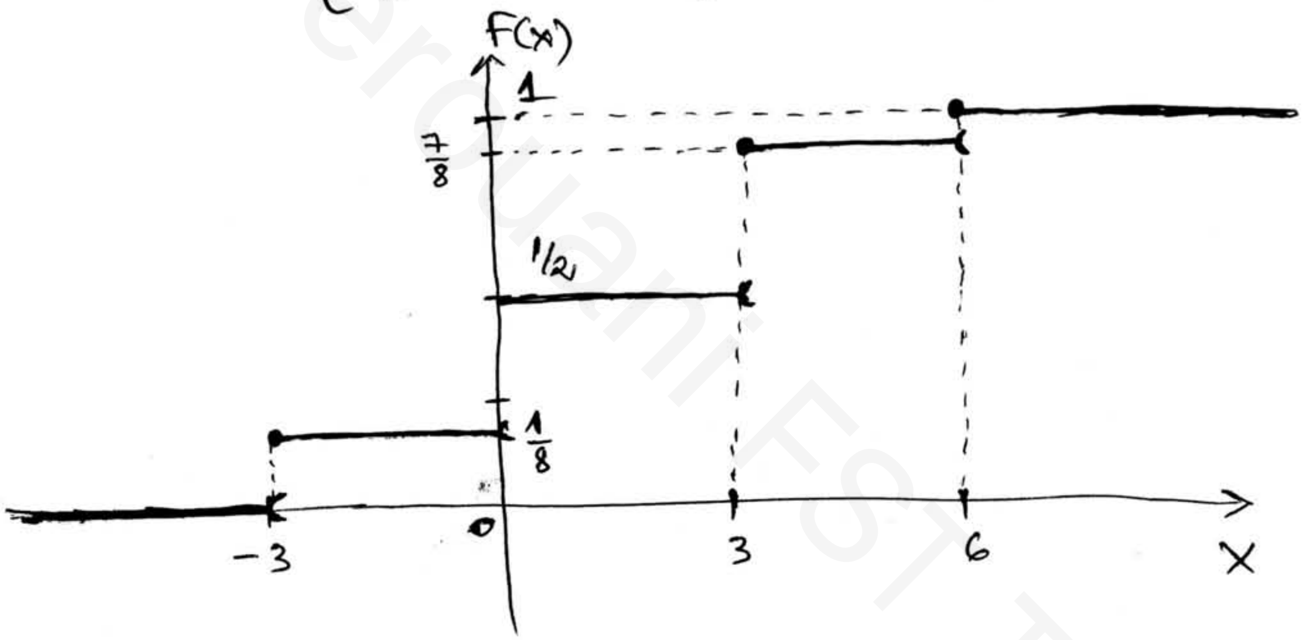
$P(X=0) + P(X=3) + P(X=-3) + P(X=6) = \frac{8}{8} = 1$

2°) $F(x) = P(X \leq x)$

$F(x) = \sum_{\{i : x_i \leq x\}} P(\{x_i\}) = \sum_{\{i : x_i \leq x\}} P(X = x_i)$

X_i	-3	0	3	6
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{1}{8} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{4}{8} = \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



Exercice 4 :

$p = P\{\text{Gagner une partie}\} = \frac{1}{3}$

$q = P\{\text{perdre une partie}\} = 1 - \frac{1}{3} = 1 - p = \frac{2}{3}$

Il joue cinq parties $\Rightarrow n = 5$

Soit X v.a. représentant le nombre de parties gagnées

$X \sim B(5, \frac{1}{3})$; $n = 5$; $p = \frac{1}{3}$; $1 - p = q = \frac{2}{3}$

(i) a) $P(X=3) = C_{n=5}^{k=3} p^k (1-p)^{n-k}$

$= C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-3}$

$= \frac{5!}{3!\,2!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= \frac{4 \times 5}{2} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = \frac{40}{243} =$

b) $P(X=5) = C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

c) $P(X \leq 1) = 1 - P(X > 1)$

$= 1 - P(X \geq 2)$

$P(X \geq 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)$

$+ C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0$

$= \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} + \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5!}{4!\,1!} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{243}$

$= \frac{10}{9} \cdot \frac{8}{27} + \frac{10}{27} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{81} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{243} = \frac{80 + 40 + 10 + 1}{243} = \frac{131}{243}$

$P(X \leq 1) = 1 - \frac{131}{243} = \boxed{\frac{112}{243}}$

ou

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= C_5^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{5!}{5!} \cdot \frac{32}{243} + \frac{5!}{1!\,4!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{32}{243} + \frac{5}{3} \cdot \frac{16}{81}$$

$$= \frac{32+80}{243} = \boxed{\frac{112}{243}}.$$

(d) $$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - \frac{112}{243}$$

$$= \frac{131}{243}.$$

(ii) $E(X) = np = \frac{5}{3} \approx 1{,}666\ldots$

Ex. 5

$\lambda = 5$

X = nbre de réclamations par jour

X v.a. $\sim \mathcal{P}(5)$

(i) $P(X \leqslant 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

(Théorème des probabilités totales)

D'après une table des probabilités de la loi de Poisson $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, on a :

$P(X=0) = \frac{e^{-5} \times 5^0}{0!}$

$P(X=0) = 0,0067 = $

$P(X=1) = 0,0337 = \frac{e^{-5} \times 5^1}{1!}$

$P(X=2) = 0,0842 = \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!}$

$P(X=3) = 0,1404 = \frac{e^{-5} \times 5^3}{3!}$

Donc $\underline{P(X \leq 3) = 0,265}$

(ii) Soit S = nbre de réclamations reçues au cours d'une semaine

$= X_1 + X_2 + \cdots + X_6 \sim \mathcal{P}(30)$

$P(S \leq 4) = P(S=0) + P(S=1) + P(S=2) + P(S=3) + P(S=4)$

~~D'après la table des probabilités de la loi de Poisson~~, on a :

$P(X=0) = \frac{e^{-30}\, 30^0}{0!}$; $P(X=2) = \frac{e^{-30}\, 30^2}{2!}$

$P(X=1) = e^{-30} \frac{30^1}{1!}$; $P(X=3) = e^{-30} \frac{30^3}{3!}$

$P(X=4) = e^{-30} \frac{30^4}{4!}$

$\Rightarrow P(X=0) =$ $P(X=3) =$

$P(X=1) =$ $P(X=4) =$

$P(X=2) =$

$P(S \leq 4) = e^{-30}(1 + 30 + 450 + 4500 + 33750) \approx 3,624 \cdot 10^{-9}$

iii) Soit

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la compagnie reçoit 4 reclamations / jour} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ avec $p(\text{4 reclations}) = p$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} = e^{-5} \frac{5^4}{4!} = e^{-5} \times 26{,}042 = 0{,}1755$$

$$Z = \sum_{i=1}^{5} Y_i \sim B(5, p)$$

$$p(Z=3) = C_5^3 \, p^3 (1-p)^{5-3}$$

$$= \frac{5!}{3!\,2!} p^3 (1-p)^2$$

$$= \frac{4 \times 5}{2} (0{,}1755)^3 (1-0{,}1755)^2$$

$$= 0{,}054 \times 0{,}68 = 0{,}037$$

Ex. 6 :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$$

(i) loi de X

$$\{X = 1\} = \{\text{cible atteinte}\}$$

$$\{X = 0\} = \{\text{cible non atteinte}\}$$

$P\{X=1\} = p$ et $P\{X=0\} = 1-p$

L'expérience se répète n fois (Anas tire n tirs)

Alors $X \sim B(n, p)$

(ii) loi de Y

Soit A l'évènement « le compteur affiche le bon résultat »

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) \text{ si } \omega \in A \\ X(\omega)+1 \text{ si } \omega \in \overline{A} \end{cases}$$

$$Y(\Omega) = \{0, \dots, n+1\}$$

$$P(Y=k) = P(Y=k/A) \cdot P(A) + P(Y=k/\overline{A}) \cdot P(\overline{A})$$

$$= \frac{1}{2} P(X=k) + \frac{1}{2} P(X=k-1)$$

si $k=0$ $\quad P(Y=0) = \frac{1}{2} C_n^0 (1-p)^n = \frac{1}{2} \frac{n!}{0!\,n!} (1-p)^n = \frac{(1-p)^n}{2}$

si $k=n+1$ $\quad P(Y=n+1) = \frac{1}{2} C_n^n p^n = \frac{p^n}{2}$

autrement si $1 \leq k \leq n$

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}\left[C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k}\right]$$

Ex. 6 (suite)

(iii) L'espérance de Y :

$$E(Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1} k\, P(X=k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1} k\, P(X=k-1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} k\, P(X=k-1)$$

$$= \frac{E(X)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k'=0}^{n} (k'+1)\, P(X=k')$$

$$= \frac{E(X)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k'=0}^{n} k'\, P(X=k') + \frac{1}{2}\sum_{k'=0}^{n} P(X=k')$$

$$E(Y) = E(X) + \frac{1}{2}$$

Exercice 7

$$* \quad P(X=n) = \frac{4}{n} P(X=n-1)$$

$$= \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n-1} P(X=n-2)$$

$$= \frac{4^2}{n(n-1)} \cdot P(X=n-1-1)$$

$$= \cdots = \frac{4^n}{n(n-1)\cdots 1} P(X=0)$$

$$= \frac{4^n}{n!} P(X=0)$$

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = P(X=0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

$$= P(X=0)\, e^4 = 1$$

$$\Longleftrightarrow P(X=0) = e^{-4}$$

$$\Longrightarrow P(X=n) = e^{-4} \frac{4^n}{n!}$$

donc $X \sim \mathcal{P}(4)$

$*$ $E(X) = 4$, en effet

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-4} \frac{4^k}{k!} = 4 e^{-4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= 4 e^{-4} e^4 = 4$$

$*$ $Var(X) = 4$, en effet

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-4} \frac{4^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-4} \frac{4^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k-1)+1\right] e^{-4} \frac{4^k}{(k-1)!}$$

$$= 4^2 e^{-4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^{k-2}}{(k-2)!} + 4 e^{-4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= 4^2 e^{-4} e^4 + 4 e^{-4} e^4 = 4^2 + 4$$

et donc $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4$.

Exercice 9 :

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$

X et Y indépendantes

1°) loi de $X+Y$

$$P(X+Y=k) = \sum_{j} P(X=j)\, P(Y=k-j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j \mu^{k-j}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k \quad \text{donc } X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$$

2°) loi de $X / X+Y=n$

soit $m < n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(X=m / X+Y=n) = \frac{P(X=m, Y=n-m)}{P(X+Y=n)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{n-m}}{(n-m)!}}{\sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\mu^{(n-k)!}}{(n-k)!}} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^m \cdot \mu^{n-m}}{m!\,(n-m)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}}$$

$$= C_n^m \frac{\lambda^m \mu^{n-m}}{(\lambda+\mu)^n} = C_n^m \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-m}$$

$m = 0, 1, 2, \dots, n$

Donc $X/_{X+Y=n}$ suit une loi binomiale de paramètre $0 \le p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \le 1$

Ex. 8 :

X et Y deux v.a. $\quad Y = X^2$

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

(i) loi de Y

y	0	1	4
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(ii)

$y \backslash x$	-2	-1	0	1	2	$P(Y=y)$
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$1/6$
1	0	$1/4$	0	$1/4$	0	$1/2$
4	$1/6$	0	0	0	$1/6$	$1/3$
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

$Y = X^2$

$Y=0 \Rightarrow X=0$

$Y=1 \Rightarrow \begin{cases} X=1 \\ X=-1 \end{cases}$

$Y=4 \Rightarrow \begin{cases} X=2 \\ X=-2 \end{cases}$

$\sum_x P(X=0, Y=0) = P(Y=0)$

(iii) $P(X=0, Y=0) = \frac{1}{6}$

$\neq P(X=0).P(Y=0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Ex. 10

$$E(u^X) \quad ; |u| < 1$$

$$Y = \phi(X) = u^X \quad \text{avec } |u| < 1$$

$$E(Y) = \sum_i \phi(x_i)\, P(X = x_i)$$

$$= \sum_i u^{x_i}\, P(X = x_i)$$

i)* $X \sim B(p)$ loi de Bernoulli de paramètre p

$P(X=0) = q = 1-p$ et $P(X=1) = p$

$$E(Y) = u^0(1-p) + u^1 p = \boxed{up.}$$

ii) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k P(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda u} = e^{\lambda(u-1)}$$

---

si $X \sim B(n,p)$ loi binomiale de paramètres n et p

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} u^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (up)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \left(up + (1-p)\right)^n = \left(1 + p(u-1)\right)^n.$$

Ex. 11 :

X_i v.a. = "Nbre de voitures du ménage résidant à l'appartement numéro i"

$$P(X_i = 1) = 0{,}70$$
$$P(X_i = 2) = 0{,}30$$

$X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ indép.

1°) on pose $Y_i = X_i - 1$

$$P(Y_i = 0) = 0{,}70 \quad \text{et} \quad P(Y_i = 1) = 0{,}30$$

la loi de Y_i est de Bernoulli de paramètre 0,30

2°) $S = Y_1 + \cdots + Y_{10}$ sera binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}30$

car elle est la somme de 10 v.a. de Bernoulli, indép et de même paramètre $p = 0{,}30$

3°) $\cancel{\text{[illegible]}}$ $\quad P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i = 19\right)$

$$= P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10} = 19)$$
$$= P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{10} = 9)$$
$$= P(S = 9) = C_{10}^{9} (0{,}30)^9 (0{,}70)^{10-9}$$
$$= \frac{10!}{9!\,1!} \times (0{,}30)^9 (0{,}70) = 1{,}37781 \cdot 10^{-4}$$

Ex. 12 : salaires mensuels

$S \sim \mathcal{U}[2500, 4500]$

1°) $P(2800 < S < 4200) = \int_{2800}^{4200} f(s)\,ds$

avec
on a : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4500-2500} & \text{si } 2500 \leq x \leq 4500 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000} & \text{si } 2500 \leq x \leq 4500 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$P(2800 < S < 4200) = \frac{1}{2000}(4200 - 2800)$

$= 0,7$

2°) salaire moyen $= E(S) = \frac{a+b}{2}$

$= \frac{2500+4500}{2} = 3500$ DH.

Résultats : loi uniforme continue

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}$

$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

sachant que
$E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$

et
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Ex. 13 :

$$f_X(x) = \begin{cases} c e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1°) c ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \int_1^{+\infty} c e^{-x}\,dx = 1$$

$$\iff c \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

$$\iff c \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = 1$$

$$\iff c\left(-0 + e^{-1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

2°) loi de $Y = X - 1 = \varphi(X) \Rightarrow x = y + 1 = \varphi^{-1}(y)$

avec $\varphi(x) = x - 1$ $\quad \varphi'(x) = 1 > 0 \Rightarrow \varphi \text{ st } \nearrow$

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\,|(\varphi^{-1}(y))'|$$

$$= f_X(y+1)\,|1|$$

$$= \begin{cases} c\, e^{-(y+1)} & \text{si } y+1 \geq 1 \\ 0 & \text{si } y+1 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{1} e^{-y} e^{-1} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}}$$

3°) $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^{+\infty} y e^{-y}\, dy$

$u = y \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-y} \Rightarrow v = -e^{-y}$

$= [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'v\, dy$

$= [-ye^{-y}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy$

$= 0 + 0 + [-e^{-y}]_0^{+\infty} = -0 + 1 = 1$

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\, dy$

$u = y^2 \Rightarrow u' = 2y$

$v' = e^{-y} \Rightarrow v = -e^{-y}$

$= [-y^2 e^{-y}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} y e^{-y}\, dy$

$= 0 + 0 + 2$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 2 - 1 = 1$

$E(X) = E(Y+1) = E(Y) + 1 = 1 + 1 = 2$

$Var(X) = Var(Y+1) = Var(Y) = 1$

Ex. 14 :

Partie A :

$X \sim U[0,1]$

$Y = 4X + 3 = \varphi(X)$

1°) $\varphi(x) = 4x+3$ $\qquad \varphi'(x) = 4 > 0 \to \varphi$ st $\nearrow$

$4x+3 = y$

$\varphi^{-1}(y) = \frac{y-3}{4} \Rightarrow (\varphi^{-1})' = \frac{1}{4}$

$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \left| (\varphi^{-1}(y))' \right|$

on sait que $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-3}{4}\right) \left|\frac{1}{4}\right| = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } \frac{y-3}{4} \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } y \in [3,7] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\qquad 0 \leq \frac{y-3}{4} \leq 1$

$0 \leq y-3 \leq 4$

$3 \leq y \leq 7$

Donc

$Y \sim U[3,7]$

2°) $E(Y) = \frac{a+b}{2} = 5$

$Var(Y) = \frac{(7-3)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

Partie B :

$X \sim U[0,1[$ $\quad$ et $\lambda > 0$

Loi de $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-X) = \varphi(x)$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{\lambda(1-x)}$

$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-X) \Rightarrow 1-X = e^{-\lambda Y}$

$\Rightarrow 1 - e^{-\lambda y} = X = \varphi^{-1}(y)$

$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \left| (\varphi^{-1}(y))' \right| = f_X(1-e^{-\lambda y}) \left| +\lambda e^{-\lambda y} \right|$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } 0 \leq 1 - e^{-\lambda y} < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$-1 \leq -e^{-\lambda y} < 0$

$0 < e^{-\lambda y} \leq 1$

$\ln 0 < -\lambda y \leq \ln 1$

$-\infty < -\lambda y \leq 0$

$\lambda y \geq 0$

$Y \sim \exp(\lambda)$ exponentielle de paramètre λ

on sait que $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$

et $Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$

Ex. 15 :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°) $$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 6t(1-t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} (6t - 6t^2)\,dt = 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - 6\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2}\right) - 6\left(\frac{x^3}{3}\right) = 3x^2 - 2x^3$$

$$= x^2(3-2x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2(3-2x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2°) $E\left(\frac{1}{X}\right) = E(Y)$ avec $Y = \varphi(X) = \frac{1}{X}$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{\cancel{x}}\, 6\cancel{x}(1-x)\,dx$$

$$= 6\int_0^1 dx - 6\int_0^1 x\,dx = 6 - 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 6 - \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E\left(\frac{1}{X}\right) = 3}$$

3°) $Y = \ln(1+X)$

$Y = \varphi(X)$ avec $\varphi(x) = \ln(1+x)$

$\Rightarrow \boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{1+x}}$

$\ln(1+x) = y \Rightarrow 1+x = e^y$

$\Rightarrow x = e^y - 1$

$\Rightarrow \boxed{\varphi^{-1}(y) = e^y - 1} \Rightarrow (\varphi^{-1}(y))' = e^y$

$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \, |(\varphi^{-1}(y))'|$

$= f_X(e^y - 1) \cdot e^y$

$$= \begin{cases} 6(e^y-1)(1-e^y+1)e^y & \text{si } 0 \leq e^y - 1 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$1 \leq e^y \leq 2$

$\underset{\overset{\|}{0}}{\ln 1} \leq y \leq \ln 2$

$$= \begin{cases} 6e^y(e^y-1)(2-e^y) & \text{si } 0 \leq y \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$