Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

2018 – 2019
S.M.A
S.M.I S_3

Contrôle de Probabilité

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ de densité de probabilité $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

On pose $V=-\ln X$

1°) Trouver la densité de probabilité de V.

2°) Calculer $P\left\{|V-1|>\frac{1}{10}\right\}$

Exercice 2 : Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties. On admet que la probabilité qu'il gagne la première partie est 0,1 :

- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est 0,8
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est 0,6

On note pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $G_n=$ "le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie" et $p_n=P(G_n)$.

1°) Calculer p_2.

2°) Le joueur a gagné la $2^{\text{ième}}$ partie, calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3°) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les 3 premières parties.

4°) Montrer que pour tout entier naturel n, non nul $p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$.

5°) On suppose que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite l.
Trouver l et montrer que la suite $(p_n-l)_{n\geq 1}$ est géométrique.

6°) En déduire p_n en fonction de n.

Tourner la page SVP

Exercice 3 : Une étude sur le budget (en dh), consacré aux vacances a donné les résultats suivants :

Budget	Fréquence cumulée
[800 , 1000 [	0,08
[1000 , 1400 [	0,18
[1400 , 1600 [	0,34
[1600 , b [	0,64
[b , 2400 [	0,73
[2400 , a [	1

On donne : l'étendue est 3200 et le budget moyen est de 1995

1°) Calculer a et b.

2°) Trouver Q_1

3°) On suppose que l'étude a porté sur 100 familles. Quel est le pourcentage de familles qui ont un budget entre 1400 et 1600 dhs.

Univ. Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

2018 – 2019
S.M.A. S_3
S.M.I.

Correction du contrôle de Probabilité

Ex. 1 :

$$X \sim \mathcal{U}([0,1]) \Longrightarrow V = -\ln X \geq 0$$

1°) Posons $\varphi(x) = -\ln x$

$\ln$ est une fonction continue et strictement monotone sur son domaine de définition,

$$f_V(v) = f_X(\varphi^{-1}(v)) \left| (\varphi^{-1}(v))' \right| \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)$$

$$= f_X(e^{-v})\, e^{-v}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)$$

$$= 1 \times e^{-v}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)$$

Donc $V \sim \mathcal{E}xp(1)$ (exponentielle de paramètre 1)

2°) $$P\left\{|V-1| > \frac{1}{10}\right\} = 1 - P\left\{|V-1| \leq \frac{1}{10}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{1 - \frac{1}{10} \leq V \leq 1 + \frac{1}{10}\right\}$$

$$= 1 - \int_{9/10}^{11/10} e^{-v}\, dv$$

$$= 1 - \left(e^{-9/10} - e^{-11/10}\right)$$

Ex. 2 :

1°) $P_2 = P(G_2)$

$$= P(G_2/G_1).P(G_1) + P(G_2/\overline{G_1}).P(\overline{G_1})$$

$$= 0,8 \times 0,1 + 0,6 \times 0,9$$

$$= 0,62$$

2°) $P(\overline{G_1}/G_2) = \dfrac{P(G_2/\overline{G_1}) \cdot P(\overline{G_1})}{P(G_2)} = \dfrac{0,54}{0,62} = 0,871$

3°) $P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = 1 - P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3})$

$= 1 - P(\overline{G_1})\, P(\overline{G_2}/\overline{G_1})\, P(\overline{G_3}/\overline{G_1} \cap \overline{G_2})$

$= 1 - P(\overline{G_1})\, P(\overline{G_2}/\overline{G_1})\, P(\overline{G_3}/\overline{G_2})$

$= 1 - 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,856$

4°) $P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/G_n) \cdot P(G_n) + P(G_{n+1}/\overline{G_n})\, P(\overline{G_n})$

$\Rightarrow P_{n+1} = 0,8\, P_n + 0,6\,(1 - P_n)$

$\Rightarrow P_{n+1} = \frac{1}{5} P_n + \frac{3}{5}$

5°) a) $l = \frac{1}{5} l + \frac{3}{5} \Rightarrow l = \frac{3}{4}$

$P_{n+1} - l = P_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5} P_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{5}\left(P_n - \frac{3}{4}\right) \Rightarrow (P_n - l)$ suite géométrique

b) $P_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}\left(P_{n-1} - \frac{3}{4}\right) = \dots = \frac{1}{5^{n-1}}\left(P_1 - \frac{}{4}\right)$

$= \frac{1}{5^n}\left(-\frac{13}{4}\right)$

Donc $P_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{5^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ex.3 :

$[e_{i-1}, e_i[$	c_i	f_i	F_i	n_i	N_i
[800, 1000[	900	0,08	0,08	8	8
[1000, 1400[	1200	0,1	0,18	10	18
[1400, 1600[	1500	0,16	0,34	16	34
[1600, b[	$\frac{1600+b}{2}$	0,3	0,64	30	64
[b, 2400[	$\frac{b+2400}{2}$	0,09	0,73	9	73
[2400, a[	3200	0,27	1	27	100
				N = 100	

1°) On sait que l'étendue est égale $e_{max} - e_{min}$

Donc $3200 = a - 800$, d'où $a = 3200 + 800 = 4000$

On a : $\overline{X} = 1995 = \frac{1}{N}\sum_i n_i c_i = \sum_i f_i c_i$

Donc, il faut d'abord calculer les fréquences relatives à partir des fréquences cumulées (voir tableau) et on a aussi chercher les centres de classes après avoir trouver a.

Ainsi :

$$\overline{X} = 1995 = \sum_i f_i c_i = 0{,}08 \times 900 + 0{,}1 \times 1200 + 0{,}16 \times 1500$$
$$+ 0{,}3 \times \left(\frac{1600+b}{2}\right) + 0{,}09 \times \left(\frac{b+2400}{2}\right) + 0{,}27 \times 3200$$
$$= 1644 + 0{,}195\, b$$

D'où $b = 1800$

2°) Calcul de Q_1 :

On cherche $\frac{1}{4} = 0,25$ parmi les fréquences cumulées. Dans ce cas, on ne la trouve pas exactement. Mais la première valeur qui la dépasse est 0,34. Donc $Q_1 \in [1400, 1600]$

$$Q_1 = e_{i-1} + \frac{F_i - F_{i-1}}{f_i} \times a_i$$

$$Q_1 = 1400 + \frac{0,25 - 0,18}{0,16} \times 200$$

$$Q_1 = 1487,5 \in [1400, 1600]$$

3°) Le pourcentage de familles qui ont un budget entre 1400 et 1600 dhs est 34 %.