Simulation des variables aléatoires

Prof. Mohamed El Merouani
http://elmerouani.jimdo.com
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

1

Simulation par la méthode d'inversion

2

Introduction:

- on suppose que l'on dispose d'un bon générateur de nombres pseudo-aléatoires et on se demande comment à partir d'une suite $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur [0, 1] construire une variable aléatoire de loi donnée, avec une attention particulière pour les lois usuelles continues et discrètes.

3

Plan

- Simulation des v.a. continues
- Simulation des v.a. discrètes

4

Fonction de répartition (Rappels):

5

Fonction de répartition d'une v.a. discrète:

- La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x est une fonction F(x).
- Cette fonction est appelée fonction de répartition de x.

  $F(x)=P(X\leq x) = \sum_{y\leq x} P(X=y)$
- La fonction F(x) est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1.

6

Exemple de fonction de répartition:

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a la loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

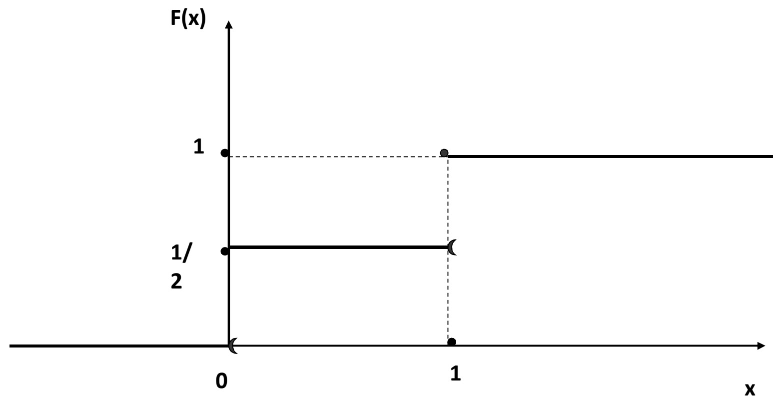
x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- Sa fonction de répartition sera:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

7

Représentation graphique de F(x):



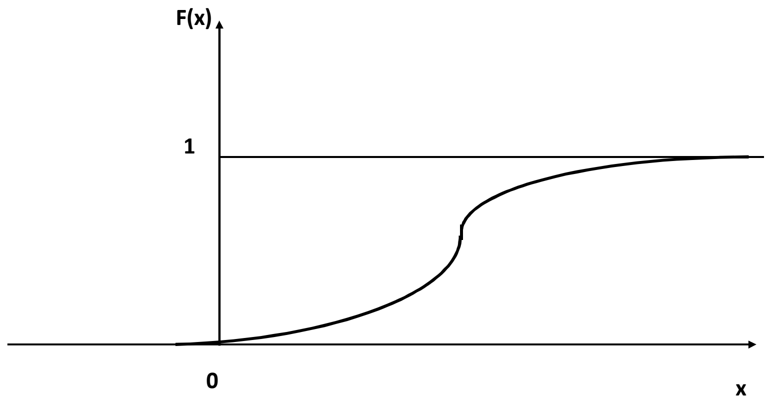
8

Fonction de répartition d'une v.a. continue:

- On définit la fonction de répartition F d'une v. a. continue X de la même manière que pour une v.a. discrète, c'est-à-dire $F(x)=P(X\leq x)$.
- La fonction continue $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est croissante de 0 à 1 lorsque x varie de -∞ à +∞.
- Par conséquent, une v.a. continue est une v.a. dont la fonction de répartition est continue.
- La fonction de densité f d'une v.a. continue X est la dérivée de da fonction de répartition F, c'est-à-dire $F'(x)=f(x)$.

9

Représentation graphique de F(x) continue:



10

Simulation des v.a. continues

11

Méthode d’inversion (Théorème):

Proposition:

Supposons que la v.a. X a pour fonction de répartition F **continue** et **strictement croissante**, toujours que $0<F(x)<1$.

Soit U v.a.$\to \mathcal{U}(0,1)$.

Alors, la v.a. $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.

12

Méthode d'inversion (dém):

Démonstration:

Soit G la fonction de répartition de $F^{-1}(U)$.

Alors: $G(x)=P(F^{-1}(U)\leq x)$

$=P(F(F^{-1}(U))\leq F(x))$. (par la monotonie de F)

$=P(U\leq F(x))=F(x)$. (car $U\to\mathcal{U}(0,1)$)

Méthode d'inversion (algorithme):

- Cette méthode suggère que pour générer des échantillons d'une v.a. X pour laquelle F^{-1} est connue, on peut générer des nombres aléatoires U uniformes sur (0,1) et faire $X=F^{-1}(U)$.
- Nous avons alors l'algorithme général d'inversion suivant:

Générer $U\to\mathcal{U}(0,1)$
Faire $X=F^{-1}(U)$
Sortir X

Méthode d'inversion (Remarques):

- Une condition minime pour l'application de cette méthode est de connaître la forme explicite de F^{-1}.
- Cela est vérifié pour plusieurs lois de probabilités, comme l'uniforme, l'exponentielle, de Weibull, de Cauchy,…
- Remarquons qu'une telle condition n'est pas suffisante, par exemple, pour la loi beta, il est possible théoriquement de la simuler par inversion, mais elle peut résulter très couteuse.
- Parfois, nous disposons d'une bonne approximation de F^{-1}, d'où on peut utiliser la méthode par approximation.

15

Méthode d'inversion-Exemples:

1. Simulation d'une v.a. $\mathcal{U}(a,b)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\, a \le x < b \\ 1 & si\, x \ge b \end{cases}$$

Dans l'algorithme général, il suffit de faire:

$$X = F^{-1}(U) = a + (b-a)U$$

16

Méthode d'inversion-Exemples:

2. Simulation d'une v.a. de Weibull $\mathcal{W}(\alpha,1)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0 \\ 1 - \exp(-x^{\alpha}) & si\, x \geq 0 \end{cases}$$

Nous faisons $X = F^{-1}(U) = [-Ln(1-U)]^{\frac{1}{\alpha}}$

ou bien $X = [-LnU]^{\frac{1}{\alpha}}$ puisque $(1-U) \to \mathcal{U}(0,1)$

17

Méthode d'inversion-Exemples:

2. Simulation d'une v.a. exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$:

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & si\, x \geq 0 \end{cases}$$

Nous faisons $X = F^{-1}(U) = \left[-\frac{Ln(1-U)}{\lambda} \right]$

Ainsi pour générer un n-echantillon selon une $\mathcal{E}xp(\lambda)$ on pose puisque $(1-U) \to \mathcal{U}(0,1)$

$$(X_1, \dots, X_n) = \left(-\frac{\ln U_1}{\lambda}, \dots, -\frac{\ln U_n}{\lambda} \right)$$

18

Vérification par histogramme:

- Quand on simule une variable aléatoire réelle à l'aide d'une des méthode (inversion ou rejet), on peut vérifier empiriquement que la loi simulée est bien celle que l'on voulait.

19

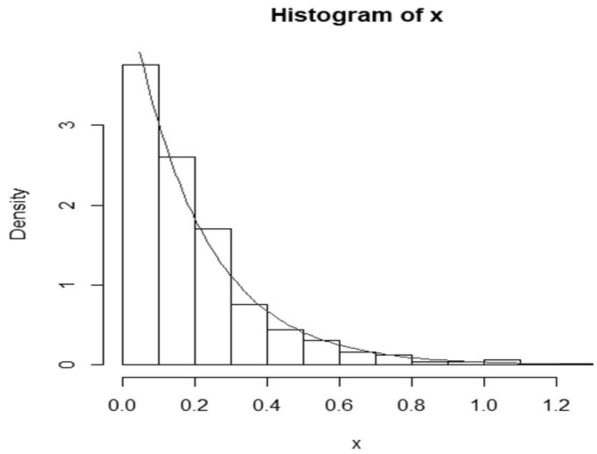
Simulation d'une v.a. exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$ et vérification par histogramme::

- Voici une implémentation en R:

```
myrexp<-function(n,lambda) + return(-log(runif(n))/lambda)
 ##Simulation d'une Exp(5)
 lambda<- 5
 x<- myrexp(500, lambda)
## Comparaison histogramme / densité
hist(x, freq=FALSE)##freq=FALSE pour aire=1
curve(dexp(x, lambda), xlim=c(0, max(x)), col="red", add=TRUE)
```

20

Simulation d'une v.a. exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$:



21

Exemple:

- $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \leq 0 \\ \frac{x}{3} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} & si\ 1 \leq x < 2 \\ 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

- $F^{-1}(y) = \begin{cases} 3y & si\ 0 \leq y < \frac{1}{3} \\ 3y - 1 & si\ \frac{2}{3} \leq y < 1 \\ 1 & si\ \frac{1}{3} \leq y < \frac{2}{3} \end{cases}$

22

Exemple:

- Donc, dans l'algorithme général on fait:

Générer $U \rightarrow \mathcal{U}(0,1)$
 Si $U < 1/3$
 Faire $X=3U$
 Si $U<2/3$
 Faire $X=1$
 Autrement
 Faire $X=3U-1$
Sortir X

Exemple:

- Voici le code R qui simule par inversion de la fonction F de cet exemple:

```
> finv<-function(u)
+ {
+ if (u<1/3)
{z=3*u}
If (u<2/3)
+ {z=1}
+ else
+ {z=3*u-1}
+ return(z)
+ }
>u=runif(1,0,1) #simulation d'une variable uniforme U(0,1)
>print(finv(u))
```

Simulation des v.a. discrètes

25

Les lois de probabilités discrètes:

- On considère une variable aléatoire discrète X qui peut prendre les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Soit $P(X=x_i)=p_i$, i=1,2,…,n

  avec $p_i \geq 0$ et $\sum p_i=1$
- Sa loi de probabilité est donnée par:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	….	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	….	p_n	1

26

Fonction de répartition d'une loi de probabilité discrète:

- Sa fonction de répartition $F(x_i)=F_i=P(X \leq x_i)=\sum_{j<i} p_j$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x < x_1 \\ p_1 & si\ x_1 \leq x < x_2 \\ p_1+p_2 & si\ x_2 \leq x < x_3 \\ p_1+p_2+p_3 & si\ x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \\ 1 & si\ x \geq x_n \end{cases}$$

27

Fonction de répartition (inverse) d'une loi de probabilité discrète:

- On définit la fonction $\overline{F}$

$$\overline{F}(u)=\begin{cases} x_1 & si\quad 0<u<F(x_1) \\ x_2 & si\quad F(x_1)\leq u<F(x_2) \\ x_3 & si\quad F(x_2)\leq u<F(x_3) \\ x_4 & si\quad F(x_3)\leq u<F(x_4) \\ \vdots & \\ x_n & si\quad F(x_{n-1})\leq x<F(x_n)=1 \end{cases}$$

28

Fonction de répartition (inverse) d’une loi de probabilité discrète:

$$\bar{F}(u) = \begin{cases} x_1 & si \quad 0 \leq u < p_1 \\ x_2 & si \quad p_1 \leq u < p_1 + p_2 \\ x_3 & si \quad p_1 + p_2 \leq u < p_1 + p_2 + p_3 \\ x_4 & si \quad p_1 + p_2 + p_3 \leq u < p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ x_n & si \quad p_1 + \cdots + p_{n-1} \leq u < 1 \end{cases}$$

29

Méthode d’inversion pour les lois discrètes (Théorème):

- Soit $\overline{F}(u) = \min\{x : u \leq F(x)\}$
- Si $U \rightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors la v.a. $X = \overline{F}(U)$ a pour fonction de répartition F.
- Donc, dans ces conditions $\overline{F}$ joue le rôle de F^{-1}

30

Méthode d'inversion-Dém:

Remarquons le minimum est atteint parce que F est continue à droite, alors $\overline{F}$ est bien définie.

En plus, $F\left(\overline{F}(u)\right) \geq u$

et $\overline{F}\left(F(x)\right) = \min\left\{y : F(y) \geq F(x)\right\} \leq x$

D'où l'égalité des ensembles:

$$\left\{(u,x) : \overline{F}(u) \leq x\right\} = \left\{(u,x) : u \leq F(x)\right\}$$

et des probabilités:

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(\overline{F}(U) \leq x\right) = P\left(U \leq F(x)\right) = F(x)$$

31

Algorithme de la méthode d'inversion pour les lois discrètes:

- Pour une loi discrète générale, on a $\overline{F}(u) = i$ avec $F_{i-1} < u \leq F_i$, donc la méthode d'inversion est équivalente à chercher l'indice i convenable dans la liste des F_i.
- En général:

$$\overline{F}(u) = x_i \qquad si\ F(x_{i-1}) = F_{i-1} \leq u < F_i = F(x_i)$$

- Algorithme:

Générer $U \to \mathcal{U}(0,1)$
Tant que $F_i \leq U$, Faire $i=i+1$
Sortir $X=i$

32

Simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre p ∈ [0, 1]:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	q=1-p	p	1

- Sa fonction de répartition est:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ q=1-p & si\, 0\le x<1 \\ 1 & si\, x\ge 1 \end{cases}$$

33

Simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre p ∈ [0, 1]:

- Sa fonction de répartition inverse sera:

$$\overline{F}(u)=\begin{cases} 0 & si\ \ 0<u<q=1-p \\ 1 & si\ \ q=1-p\le u<1 \end{cases}$$

- D'où l'algorithme:

Générer $U \to \mathcal{U}(0,1)$
Si U≥1-p, sortir $X=1$
Autrement, Sortir $X=0$

34

Simulation d'une loi uniforme discrète:

- Une v.a. X suivant une loi de probabilité uniforme discrète prend les valeurs entiers naturelles i=1,2,…,n avec la même probabilité

$$P(X=i)=\frac{1}{n},\ \ \forall\, i=1,2,\ldots,n$$

- Sa fonction de répartition est:

$$F(x)=P(X\le i)=\sum_{j\le i} p_j=\frac{i}{n}\qquad si\ \ i\le x<i+1$$

35

Simulation d'une loi uniforme discrète:

- Sa fonction de répartition inverse est:

$$\overline{F}(u)=X=i\quad si\ F(x_{i-1})=F_{i-1}=\frac{i-1}{n}\le u<\frac{i}{n}=F_i=F(x_i)$$

$$\Rightarrow i-1\le nu\le i$$

ou encore $X=ent(nu)+1$

36

Exemple:

- Supposons que l'on veuille simuler le résultat d'un dé équilibré:
- La méthode précédente s'applique, mais on aura plus vite fait de considérer

$$X = ent(6U),$$

- où $ent()$ désigne la partie entière, ce qui donne en R

```
x<-ceiling(6*runif(1))
```

37