

Simulation des variables aléatoires

Prof. Mohamed El Merouani
<http://elmerouani.jimdo.com>
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

1

Simulation par la méthode de rejet (2)

Simulation des v.a. discrètes:

- L'idée est la même que le cas continu.
- On veut simuler une v.a. discrète de fonction de probabilité $\{P(X_i=x_i)=p_i, i \geq 0\}$.
- Nous disposons d'une méthode plus efficace pour simuler une v.a. discrète Y de fonction de probabilité $\{P(Y_i=y_i)=q_i, i \geq 0\}$.
- Pour simuler à partir de X , premièrement on simule Y et on accepte les valeurs simulées de probabilité proportionnelle à p_i/q_i

Algorithme de rejet pour simuler des v.a. discrètes:

- Soit c une constante telle que $p_i/q_i \leq c$, pour tout i .
- La méthode de rejet pour générer X est donnée par l'algorithme suivant:
 1. Faire $i=1$
 2. Générer une valeur aléatoire u de la loi uniforme $U(0,1)$.
 3. Générer une v. a. discrète Y de loi $\{q_i, i \geq 0\}$.
 4. Si $u \leq p_i/cq_i$, faire $x_i=y$. Autrement, aller à l'étape 2

- Comme dans le cas continue, on peut montrer que la v.a. X a la loi de probabilité

$$\{P(X_i=x_i)=p_i, i \geq 0\}.$$

- Dans chaque itération, on accepte la valeur (de forme indépendante) avec la probabilité $1/c$ et le nombre moyen des itérations jusqu'à l'acceptation est c .

Exemple:

- Soit X la v.a. discrète à simuler de loi de probabilité donnée par le tableau suivant:

i	1	2	3	4	5
p_i	0,19	0,20	0,18	0,22	0,21

- On peut appliquer la méthode d'inversion pour générer X . (A faire comme exercice)
- Mais, il résulte plus efficace d'appliquer la méthode de rejet en prenant pour la variable Y l'uniforme discrète en $1, \dots, 5$ i.e. $q_i=1/5$ pour $i=1, \dots, 5$

Exemple:

- Pour cette variable, on prend $c = \max(p_i/q_i) = 1,1$ dans ce cas $c \cdot q_i = 1,1/5 = 0,22$
- L'algorithme est donc:
 1. Faire $i=1$
 2. Générer une valeur aléatoire u de la loi uniforme $U(0,1)$.
 3. Générer une v. a. discrète $Y = \text{ent}(5U) + 1$.
 4. Si $u \leq p_i/0,22$, faire $x_i = y$. Autrement, aller à l'étape 2

Exemple:

- Cet algorithme nécessite en moyen 1,1 itérations jusqu'à accepter une valeur pour la variable X.

Exercice (Méthode d'inversion pour le cas discret):

- La fonction de répartition F_i de la v.a. discrète X est:

i	1	2	3	4	5
p_i	0,19	0,20	0,18	0,22	0,21
F_i	0,19	0,39	0,57	0,79	1

- L'algorithme initial d'inversion sera:

Générer $U \sim U(0,1)$
 Si $U < 0,19$, sortir $X=1$
 Si $U < 0,39$, sortir $X=2$
 Si $U < 0,57$, sortir $X=3$
 Si $U < 0,79$, sortir $X=4$
 Sortir $X=5$

Exercice (Méthode d'inversion pour le cas discret):

- Si nous ordonnons les p_i par ordre décroissant, on aura l'algorithme plus efficace suivant:

Générer $U \sim U(0,1)$
 Si $U < 0,22$, sortir $X=4$
 Si $U < 0,43$, sortir $X=5$
 Si $U < 0,63$, sortir $X=2$
 Si $U < 0,82$, sortir $X=1$
 Sortir $X=3$