

Chapitre 3

**Lois de probabilités usuelles
discrètes et continues**

1

**Lois de probabilités
discrètes**

2

Loi de Dirac:

- Soit un nombre a fixé et soit une v.a. X prenant la valeur a , c'est-à-dire $P(X=a)=1$.

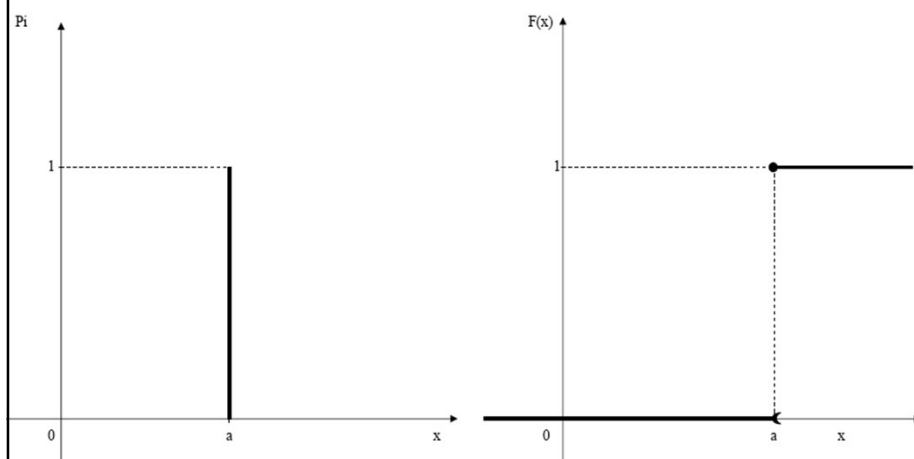
On appelle loi de Dirac au point a la probabilité

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

La représentation de l'histogramme et de la fonction de répartition sont:

3

Loi de Dirac:



4

Loi de Dirac:

- Sa fonction de répartition:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est $E(X)=a$
et $E(X^2)=a^2$
- Sa variance est $Var(X)=0$

Prof. Mohamed El Merouani

5

Loi de Bernoulli:

- Une v. a. X suit une loi de Bernoulli si elle prend les deux valeurs 1 et 0 avec $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=q$ où $p+q=1$.
- p s'appelle paramètre de la loi.
- $\{X=1\}$ est dit événement succès et $\{X=0\}$ est dit événement échec.
- X représente donc le nombre de succès obtenu après la réalisation d'une seule expérience aléatoire.

Prof. Mohamed El Merouani

6

Loi de Bernoulli:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	1	0	$\sum p_i$
p_i	p	$q=1-p$	1

$$\text{Alors } E(X) = \sum x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

$$\text{Var}(X) = \sum x_i^2 p_i - E(X)^2 = x_1^2 p + x_0^2 q - p^2 = p - p^2$$

$$\text{Var}(X) = p(1-p) = pq$$

Prof. Mohamed El Merouani

7

Loi Binômiale:

- On considère l'expérience qui consiste en n répétitions indépendantes d'une même expérience dont l'issue est l'apparition ou la non apparition d'un événement A qui:
 - Soit se réalise avec la probabilité p (p =probabilité du succès).
 - Soit ne se réalise pas avec la probabilité $q=1-p$ (q =probabilité d'échec).
- Soit X le nombre d'apparitions de cet événement parmi ces n expériences.
- On a $\Omega = \{A, \bar{A}\}^n$ et $0 \leq X \leq n$.

Prof. Mohamed El Merouani

8

Loi Binômiale:

- On cherche $P(X=k)$. Le résultat de ces n expériences est une suite (A_1, A_2, \dots, A_n) où $A_i=A$ ou \bar{A} , pour tout $i=1,2,\dots,n$.
- Si on suppose que A est apparu k fois et \bar{A} $(n-k)$ fois, la probabilité d'une de ces suites (A_1, A_2, \dots, A_n) est $p^k(1-p)^{n-k}$. Comme il existe C_n^k suites (A_1, A_2, \dots, A_n) où A est apparu k fois et \bar{A} $(n-k)$ fois, on déduit que:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad 0 \leq k \leq n.$$

9

Loi Binômiale:

- On vérifie que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$
- En effet, $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$
- On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on la note symboliquement $B(n, p)$.
- On écrit $X \sim B(n, p)$

Prof. Mohamed El Merouani

10

Loi Binômiale:

- Espérance mathématique: $E(X)=np$
- Variance mathématique: $Var(X)=npq$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{npq}$
- La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes répétés de manière indépendante pouvant prendre deux états, tels que: succès ou échec, tout ou rien.

Prof. Mohamed El Merouani

11

Loi multinomiale:

- Supposons que dans une expérience aléatoire peuvent se présenter les événements A_1, A_2, \dots, A_k qui forment un système des événements exhaustifs et mutuellement exclusifs (complet),
- $P(A_i)=p_i$ et $p_1+p_2+\dots+p_k=1$ et calculons la probabilité qu'en faisant n expériences indépendantes on ait x_1 fois l'événement A_1 , x_2 fois A_2, \dots etc, où $x_1+x_2+\dots+x_k=n$.

Prof. Mohamed El Merouani

12

Loi multinomiale:

- Cette probabilité est donnée par:

$$P(X_1 = x_1, \Lambda, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \Lambda x_k!} p_1^{x_1} \Lambda p_k^{x_k}, \text{ si } n = \sum_{i=1}^k x_i \star$$

et zéro, autrement. Avec $X_i = x_i$ signifie que l'événement A_i s'est réalisé x_i fois.

- Alors, on dit que la variable (X_1, \dots, X_k) suit une loi multinomiale de paramètres n, p_1, p_2, \dots, p_k
- Si $k=2$, on retrouve la loi binomiale.

Prof. Mohamed El Merouani

13

★ En effet,

$$P(X_1 = x_1, \Lambda, X_k = x_k) = C_n^{x_1} C_{n-x_1}^{x_2} C_{n-x_1-x_2}^{x_3} \Lambda C_{n-x_1-x_2-\Lambda-x_{k-1}}^{x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \Lambda p_k^{x_k}$$

$$P(X_1 = x_1, \Lambda, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \cdot \frac{(n-x_1-x_2)!}{x_3!(n-x_1-x_2-x_3)!} \Lambda \frac{(n-x_1-x_2-\Lambda-x_{k-1})!}{x_k! \mathbf{Q}} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \Lambda p_k^{x_k}$$

$$P(X_1 = x_1, \Lambda, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \Lambda x_k!} p_1^{x_1} \Lambda p_k^{x_k} \blacksquare$$

Prof. Mohamed El Merouani

14

Loi multinomiale:

- Les principaux moments de cette loi sont:

$$E(X_i) = np_i$$

$$Var(X_i) = np_i(1-p_i)$$

$$Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$$

Prof. Mohamed El Merouani

15

Cas particulier:

- Considérons la loi trinômiale:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{n!}{x! y! (n - x - y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$$

où $(x, y) \in \mathbf{Z}_+^2$ et $p_j \geq 0$ avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

- La loi marginale de X est $B(n, p_1)$.
- La loi marginale de Y est $B(n, p_2)$.

Prof. Mohamed El Merouani

16

Cas particulier:

$$\begin{aligned}
 P(X = x) &= \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y} \\
 &= \frac{n!}{x! (n-x)!} p_1^x \sum_{y=0}^{n-x} \frac{(n-x)!}{y! (n-x-y)!} p_2^y p_3^{n-x-y} \\
 &= C_n^x p_1^x (p_2 + p_3)^{n-x} \\
 &= C_n^x p_1^x (1 - p_1)^{n-x}
 \end{aligned}$$

Prof. Mohamed El Merouani

17

Exemple:

- Une urne contient 9 boules (dont 2 sont rouges, 3 blanches et 4 noires).
- On tire au hasard, avec remise, 3 boules de cette urne.
- En désignant par X , Y et Z le nombre de boules rouges, blanches et noires tirées, on détermine la loi $P(X=i, Y=j, Z=k)$ avec $i+j+k=3$.

Prof. Mohamed El Merouani

18

Exemple:

- La distribution relative à ces 3 variables est en fait une distribution à 2 dimensions puisque la valeur de la 3^{ème} variable est déterminée par celles de deux premières: $Z=3-X-Y$.

- On a: $p_1 = \frac{2}{9}, p_2 = \frac{3}{9}, \text{ et } p_3 = \frac{4}{9}$

- Les probabilités $P(X=i, Y=j, Z=k)$ sont calculées à l'aide de

$$P(X=i, Y=j, Z=k) = P(i, j, k) = \frac{3!}{i!j!k!} \left(\frac{2}{9}\right)^i \left(\frac{3}{9}\right)^j \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

19

Exemple:

- On obtient alors:

$$P(0,0,3)=0,0878$$

$$P(0,1,2)=0,1975$$

$$P(0,2,1)=0,1481$$

$$P(0,3,0)=0,0371$$

$$P(1,0,2)=0,1317$$

$$P(1,1,1)=0,1975$$

$$P(1,2,0)=0,0741$$

$$P(2,0,1)=0,0658$$

$$P(2,1,0)=0,0494$$

Prof. Mohamed El Merouani

20

Loi hypergéométrique:

- On considère une urne contenant N boules dont a sont blanches et $b=N-a$ sont rouges. On tire de cette urne n boules. (On peut tirer les n boules en même temps ou l'une après l'autre sans remise).
- Soit X la v.a. égale au nombre de boules blanches tirées parmi les n boules. Cette v.a. suit une loi dite hypergéométrique et est notée $H(n,a,b)$.

Prof. Mohamed El Merouani

21

Loi hypergéométrique:

- Comme $0 \leq X \leq a$ et $0 \leq n-X \leq b$, on a:

$$\max\{0, n-b\} \leq X \leq \min\{a, n\}$$
- Soit un nombre entier k tel que:

$$\max\{0, n-b\} \leq k \leq \min\{a, n\}$$
- On cherche $P(X=k)$. L'ensemble fondamental Ω est constitué de tous les sous-ensembles de n boules que l'on peut tirer de l'urne $\Omega = \mathcal{P}_n(E)$. C'est l'ensemble de parties à n éléments de l'ensemble E des boules. On a $\text{Card } \Omega = C_{a+b}^n$

22

Loi hypergéométrique:

- Le nombre de façons de tirer k boules parmi les a blanches est C_a^k et pour chacune de ces façons il y a C_b^{n-k} manières de tirer $n-k$ boules parmi les boules rouges. Donc:

$$P(X = k) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

- Comme $\sum_k C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$ on a bien $\sum_k P(X = k) = 1$

Prof. Mohamed El Merouani

23

Loi hypergéométrique:

- Espérance mathématique de $X \sim H(n, a, b)$

$$E(X) = \frac{an}{a+b}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

- Fonction génératrice des moments?

24

Loi de Poisson:

- On dit qu'une v. a. obéit à une loi de Poisson, si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs entières $0, 1, 2, \dots, k, \dots, n, \dots$ les probabilités associées étant $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n, \dots$ avec

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

- λ étant un paramètre positif, et e la base des logarithmes népériens.
- La constante λ s'appelle le paramètre de la loi.
- La loi de Poisson est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

Prof. Mohamed El Merouani

25

Loi de Poisson:

- Espérance mathématique: $E(X) = \lambda$
- Variance mathématique: $Var(X) = \lambda$
- Ecart-type: $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$
- La loi de Poisson est appelée loi des petites probabilités. On l'utilise pour représenter des phénomènes rares, tels que: nombre d'accidents, nombre de pannes, nombre de déchets dans une fabrication...

26

Loi géométrique:

- On considère une expérience à deux issues possibles (réalisation de l'événement A ou de l'événement \bar{A}). On répète indéfiniment cette expérience jusqu'à ce que A se réalise. Soit X la v.a. égale au nombre de répétitions nécessaires pour la réalisation de A .
- On a: $X(\Omega)=\{1,2,\dots,n,\dots\}$ et $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ où p est la probabilité de réalisation de l'événement A .

Prof. Mohamed El Merouani

27

Loi géométrique:

- On vérifie que c'est bien une loi de probabilité.
- En effet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

- Son espérance mathématique est:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

28

Remarque:

- Si pour la loi géométrique on prend $X(\Omega)=\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ et $P(X=k)=p(1-p)^k$
Alors l'espérance mathématique sera

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

Prof. Mohamed El Merouani

29

Loi binomiale négative:

- Une proportion p d'éléments d'une population possède un certain caractère A . On veut obtenir n éléments de ce type en procédant à une suite de tirage indépendants. Ces tirages s'effectuent avec remise. On désigne par Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir ces n éléments possédant le caractère A . La v.a. $X=Y-n$ est appelée binomiale négative.

Prof. Mohamed El Merouani

30

Loi binomiale négative:

- On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$. On cherche $P(X=i)$.
- Comme n tirages (dont le dernier) ont donné un élément possédant le caractère A et i tirages ont donné un élément ne possédant pas le caractère A , la probabilité d'un tel événement est $p^n(1-p)^i$. Le nombre de ces événements est C_{n+i-1}^{n-1} . On en déduit:

$$\forall i \in X(\Omega), P(X = i) = C_{n+i-1}^{n-1} p^n (1-p)^i$$

31

Loi binomiale négative:

- On peut vérifier que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i-1}^{n-1} p^n (1-p)^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i-1}^i p^n (1-p)^i = 1$$

- Son espérance mathématique est:

$$E(X) = n \frac{1-p}{p}$$

- Sa variance est: $Var(X) = \frac{n}{p^2} (1-p)$

Prof. Mohamed El Merouani

32

Loi uniforme discrète:

- Une v.a. X discrète suit une loi uniforme en n points x_1, x_2, \dots, x_n si sa distribution de probabilité est:

$$p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n}; \quad k = 1, \dots, n$$

- Si $n=1$, alors on retrouve la loi de Dirac dégénérée en un point a .
- **Exemples:** pièce de monnaie ($n=2$), le dé ($n=6$).

Prof. Mohamed El Merouani

33

Fonctions génératrices des moments de quelques lois discrètes usuelles

Prof. Mohamed El Merouani

34

Loi binomiale:

- La fonction génératrice des moments d'une loi binomiale $B(n,p)$ de paramètres n et p est:

$$M(t) = (pe^t + q)^n ; \text{ avec } q = 1 - p$$

- **Dém:** T.D. série n°2, Ex. 10

Prof. Mohamed El Merouani

35

Loi de Poisson:

- La fonction génératrice des moments d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ est:

$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- **Dém:** T.D. série n°2, Ex. 10

Prof. Mohamed El Merouani

36

Loi géométrique:

- La fonction génératrice des moments d'une loi géométrique de paramètre p est:

$$M(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

où $q=1-p$ et t est telle que $qe^t < 1$

Dém: T.D. série n°2, Ex. 10

Prof. Mohamed El Merouani

37

Loi binomiale négative:

- La fonction génératrice des moments d'une loi binomiale négative de paramètres n et p est:

$$M(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^n$$

Résultat: Si X_1, \dots, X_n sont des v.a. indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre p , alors leur somme suit une loi binomiale négative de paramètres n et p .

Prof. Mohamed El Merouani

38

Loi binomiale négative:

- Réciproquement, toute v.a. binomiale négative peut s'écrire comme somme de v.a. qui suivent toutes la même loi géométrique.
- Donc, la fonction génératrice des moments d'une loi binomiale négative est égale au produit de n fois la fonction génératrice des moments de la loi géométrique de paramètre p .

Prof. Mohamed El Merouani

39

Lois de probabilités continues

40

Loi uniforme:

- Une v.a. continue X suit une loi uniforme si sa densité de probabilité est donnée par:

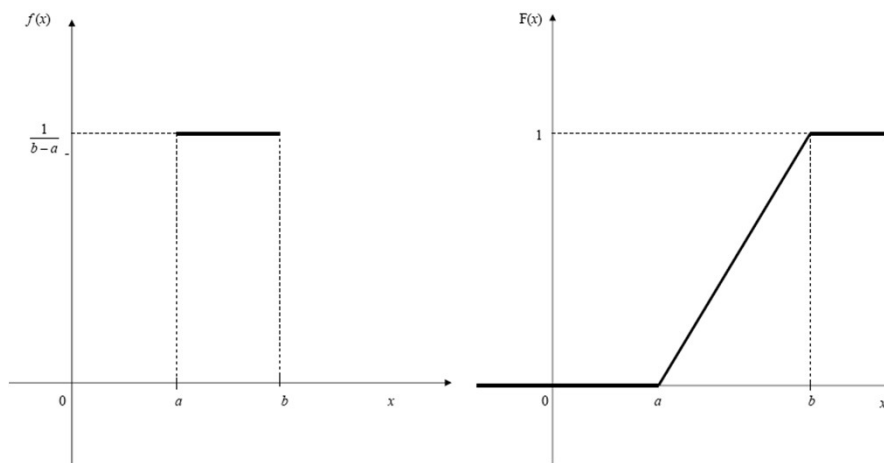
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{si } x > b \end{cases}$$

41

Loi uniforme:



42

Loi uniforme:

- L'espérance d'une v.a. continue $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ est:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Prof. Mohamed El Merouani

43

Loi uniforme:

- La fonction génératrice des moments d'une loi uniforme continue sur un intervalle $[a,b]$ est:

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}; \quad (\text{si } t \neq 0)$$

$$M(0) = 1$$

- **Dém:** (est une exercice à faire!)

Prof. Mohamed El Merouani

44

Loi exponentielle:

- Une v.a. X continue suit la loi exponentielle, de paramètre $\lambda > 0$, notée $X \sim \text{exp}(\lambda)$, si sa densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Alors son espérance mathématique est: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- Sa variance sera: $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Son écart-type est alors: $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

45

Loi exponentielle:

- Sa fonction génératrice des moments est donnée par:

$$M(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad t < \lambda$$

Prof. Mohamed El Merouani

46

Loi exponentielle:

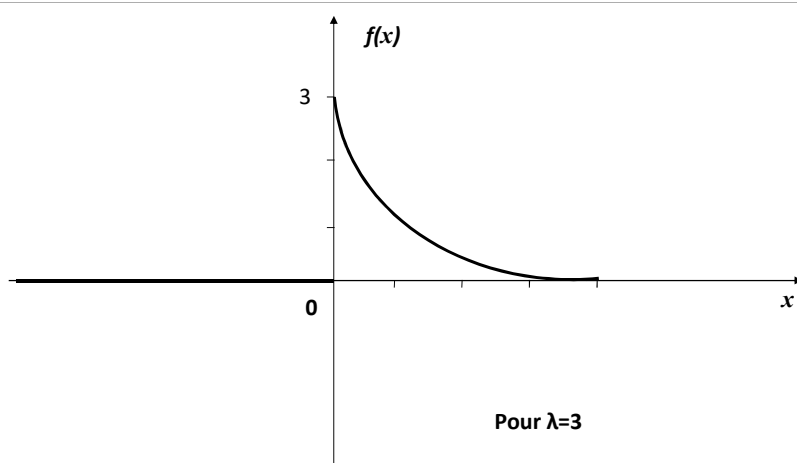
- La fonction de répartition $F(x)$ d'une v.a. X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Prof. Mohamed El Merouani

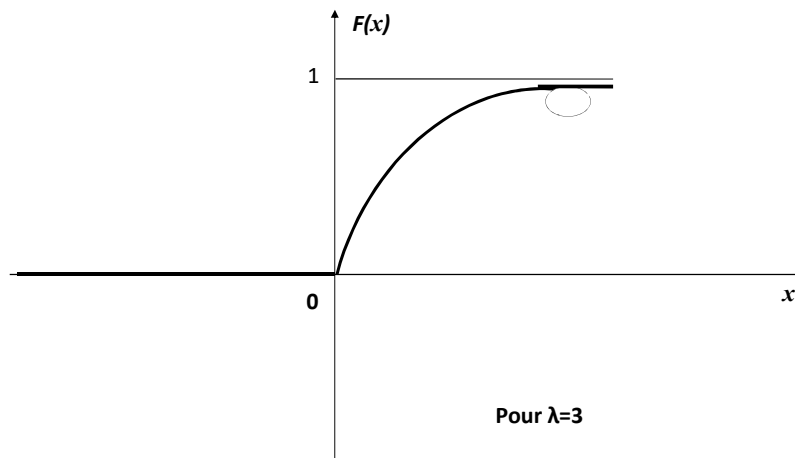
47

Représentation graphique de $f(x)$:



48

Représentation graphique de $F(x)$:



Prof. Mohamed El Merouani

49

Champs d'application:

- D'abord, on l'applique pour modéliser la demande, en gestion de stock, lorsque la symétrie n'est pas vérifiée et lorsqu'on remarque que son écart-type est égal à son espérance (sa moyenne).
- Mais en général, la loi exponentielle (négative) s'applique pour modéliser les phénomènes de désintégration. La v.a. X est alors la durée de vie du phénomène.

50

Loi Gamma:

- Une v.a. X suit une loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

51

Loi Gamma:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ est:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

- En effet, en posant $\beta x = t$, on a:

$$E(X) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^\alpha dx = \frac{1}{\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

- Sa variance est: $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

52

Loi Gamma:

- On peut montrer que la fonction génératrice des moments d'une loi Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ est:

$$M(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha ; \quad \forall t < \beta$$

Prof. Mohamed El Merouani

53

Loi de Weibull:

- Une v.a. X suit une loi de Weibull de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si sa densité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x^\alpha}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Prof. Mohamed El Merouani

54

Loi de Weibull:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Weibull de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ est:

$$E(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$$

- En effet, en posant $\beta x = t$, on démontre, comme on a vu pour la loi gamma, le résultat.

- Sa variance est:
$$Var(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}$$

55

Loi de Pareto:

- Une v.a. X suit une loi de Pareto de paramètre α si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c_0} \left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha+1} & ; \text{ si } c_0 \leq x \\ 0 & ; \text{ sinon} \end{cases}$$

- Son espérance mathématique pour $\alpha > 1$:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} c_0$$

- Sa variance (existe pour $\alpha > 2$):

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} c_0^2$$

56

Loi Bêta:

- Une v.a. X suit une loi bêta de paramètre α et β si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}; & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{sinon} \end{cases}$$

où α et β sont des constantes positives et $B(\alpha, \beta)$ est la fonction bêta d'Euler:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt ; \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}_{57}$$

Loi Bêta:

- L'espérance d'une v.a. X suit une loi bêta de paramètre α et β est: $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$
- En effet,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

58

Loi de Cauchy $C(\alpha, \lambda)$:

- Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètres α et $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2}, \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x - \alpha}{\lambda}$$

59

Loi de Cauchy $C(0, 1)$:

- Une v.a. X suit une loi de Cauchy $C(0, 1)$ de paramètres 0 et 1 , si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Les paramètres ici, ne sont pas l'espérance et l'écart-type (qui n'existent pas pour cette loi)!
- La fonction $M_X(t)$ n'existe non plus!

Prof. Mohamed El Merouani

60

Loi Normale $N(\mu, \sigma)$:

- Une v.a. continue X suit une loi normale de paramètres μ et $\sigma > 0$ si sa densité de probabilité est:

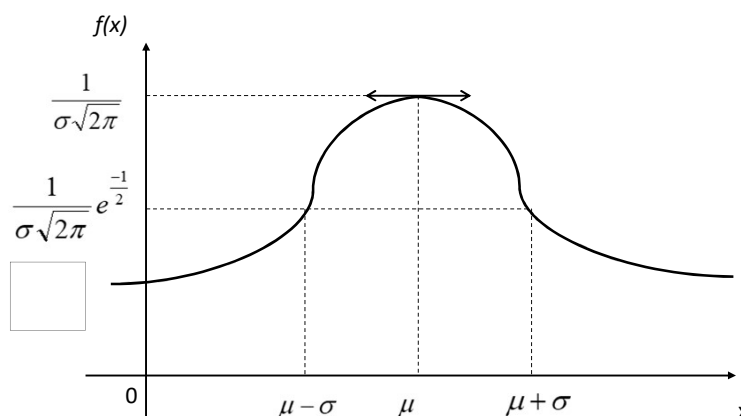
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ; x \in]-\infty, +\infty[$$

- On note $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- La loi normale est encore connue sous le nom de loi de Gauss ou de Laplace-Gauss.

Prof. Mohamed El Merouani

61

Représentation graphique de $N(\mu, \sigma)$:



62

Loi Normale $N(\mu, \sigma)$:

- La fonction de répartition de X est définie par:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- On peut montrer que:

$$E(X) = \mu$$

et

$$Var(X) = \sigma^2$$

Prof. Mohamed El Merouani

63

Loi Normale $N(\mu, \sigma)$:

- La fonction génératrice des moments d'une loi $N(\mu, \sigma)$ est:

$$M(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} ; \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Dém:** est à faire comme exercice!

Prof. Mohamed El Merouani

64

Loi Normale centrée, réduite :

- Si X suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$, alors la v.a.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

centrée réduite associée à X , suit une loi normale $N(0, 1)$, dite loi normale centrée, réduite.

65

Loi Normale centrée réduite:

- En effet, Soit $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ et $z \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq z\sigma + \mu) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z\sigma + \mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

- En posant $\frac{x - \mu}{\sigma} = t$, on obtient
- $$P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

66

Loi Normale centrée réduite:

Z est donc une v.a. continue dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

C'est-à-dire $Z \sim N(0,1)$.

67

Loi Normale centrée réduite:

- La fonction génératrice des moments d'une loi $N(0,1)$ est:

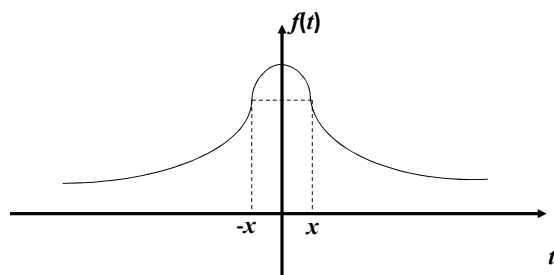
$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}; \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Dém:** est à faire en tant qu'exercice!

Prof. Mohamed El Merouani

68

Allure et propriété de la loi normale réduite:



C'est une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car elle est paire $f(-x) = f(x)$

Ainsi les tables de la loi normale centrée réduite, donnent les valeurs de la fonction $f(t)$ uniquement pour des valeurs positives de la variable t .

69

La probabilité pour que $T \sim N(0,1)$ prenne une valeur de l'intervalle (t_1, t_2)

- S'écrit alors:

$$P(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

70

Propriétés:

- On démontre que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

- L'aire comprise entre la courbe $N(0,1)$ et l'axe des t est égale à l'unité.

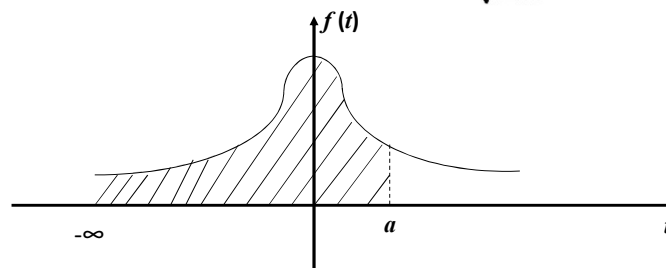
Prof. Mohamed El Merouani

71

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite:

- On définit la fonction de répartition $\Phi(t)$ de la loi normale centrée réduite, comme:

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



72

Loi Normale centrée réduite:

- On peut ramener tout calcul sur la fonction de répartition d'une v.a. normale $N(\mu, \sigma)$ à un calcul sur la fonction de répartition, notée $\Phi(x)$, d'une v.a. normale $N(0, 1)$.
- En effet, si $X \sim N(\mu, \sigma)$,

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Prof. Mohamed El Merouani

73

Loi Normale centrée réduite:

- Soit Φ la fonction de répartition de $X \sim N(0, 1)$.
On a: $\Phi(a) = 1 - \Phi(-a)$.
- En effet, comme

$$\Phi(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et

$$\Phi(a) + \Phi(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

74

Exemple:

La taille d'un groupe de 2000 personnes obéit à une loi normale $N(170 \text{ cm}, 5 \text{ cm})$.

On demande de déterminer:

1. Le nombre de personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.
2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm.

Prof. Mohamed El Merouani

75

Solution:

1. Définissons la variable centrée réduite T à partir de la variable aléatoire X :

$$T = \frac{X - 170}{5}$$

- Alors $P(168 < X < 175) = P(-0,4 \leq t \leq +1) =$
 $= \Phi(1) - \Phi(-0,4) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0,4)) =$
 $= \Phi(1) + \Phi(0,4) - 1$

Soit, en cherchant les valeurs de $\Phi(1)$ et de $\Phi(0,4)$ dans la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite: croisement de la ligne 1,0 et de la colonne 0,00; croisement de la ligne 0,4 et de la colonne 0,00.

76

D'où $P(168 \leq X \leq 175) = 0,8413 + 0,6554 - 1 = 0,4967$

Il y a donc: $2000 \times 0,4967 \approx 993$ personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.

2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm est:

$P(X > 180) = P(T > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$ soit une probabilité de 2,3%.

Il y a alors vraisemblablement $2000 \times 0,0228 \approx 45$ personnes dont la taille dépasse 180cm.

Loi Log-normale bi-paramétrique:

- Une variable aléatoire X est dite suivant une loi de probabilité Log-normale de paramètres μ et σ si la v. a. $Y = \text{Log } X$ suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .
- On note $X \sim \Lambda(\mu, \sigma)$
- Alors, la densité de probabilité de Y est:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- et celle de X sera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\text{Log } x - \mu)^2}{2\sigma^2}} ; x > 0$$

Espérance et variance:

- Soit $X \sim \Lambda(\mu, \sigma)$, son espérance est:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

- Et sa variance est:

$$\text{Var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) \{ \exp(\sigma^2) - 1 \}$$

Prof. Mohamed El Merouani

79

Loi Log-normale:

- Soit X une v.a. qui suit une loi Log-normale. Alors, la fonction $M(t) = E[e^{tX}]$ n'est pas définie pour $t > 0$;
- En d'autres termes, la loi Log-normale n'admet pas de fonction génératrice des moments qui soit définie dans un intervalle ouvert contenant $t=0$.
- Néanmoins, X admet des moments de tous les ordres entiers positifs.

Prof. Mohamed El Merouani

80

Loi Log-normale tri-paramétrique:

- Une variable aléatoire X qui peut prendre une valeur qui dépasse une valeur fixée τ est dite suivant une loi Log-normale de trois paramètres τ , μ et σ si $Y = \text{Log}(X - \tau)$ suit une loi normale de paramètres μ et σ .
- On note $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$
- Le troisième paramètre τ s'appelle le seuil.
- Ainsi, la log-normale de 2 paramètres est un cas particulier de celle de 3 paramètres avec $\tau = 0$.

81

Fonction de densité de probabilité:

- Soit $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$, alors sa fonction de densité de probabilité est:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(x-\tau)}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \{\text{Log}(x-\tau) - \mu\}^2\right] & \text{si } \tau < x < \infty \\ 0 & \text{si } x \leq \tau \end{cases}$$

Prof. Mohamed El Merouani

82

Espérance et variance:

- Soit $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$, alors,
- Son espérance est:

$$E(X) = \tau + \exp(\mu + \sigma)$$

- Sa variance est:

$$\text{Var}(X) = e^{\mu^2} \left[e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \right]$$

83

Loi du Khi-deux:

- Une v.a. X suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté (ddl en abrégé) si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}; & \text{si } x > 0 \\ 0; & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- On note $X \sim \chi^2(n)$
- Si $\frac{n}{2} = \alpha$ et $\frac{1}{2} = \beta$, on retrouve la loi Gamma.

Prof. Mohamed El Merouani

84

Loi du Khi-deux:

- On peut montrer que:

Si X_1, X_2, \dots, X_n sont n v.a. indépendantes qui suivent respectivement des lois normales

$N(\mu_1, \sigma_1), N(\mu_2, \sigma_2), \dots, N(\mu_n, \sigma_n)$, alors la v.a.

$$Z = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \text{ suit une loi de } \chi^2(n) \text{ khi-deux}$$

à n degrés de liberté

85

Loi du Khi-deux:

- C'est-à-dire:

Si Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont n v.a. indépendantes qui suivent respectivement des lois normales

centrées réduites $N(0, 1)$ alors la v.a.

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \text{ suit une loi de } \chi^2(n) \text{ khi-deux}$$

à n degrés de liberté

Prof. Mohamed El Merouani

86

Loi du Khi-deux:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté est: $E(X)=n$
- Sa variance est: $Var(X)=2n$

87

Loi du Khi-deux:

- On peut montrer que la fonction génératrice des moments d'une loi de Khi-deux à n degrés de liberté est:

$$M(t) = (1 - 2t)^{-n/2} ; \quad \forall t < \frac{1}{2}$$

Prof. Mohamed El Merouani

88

Loi de Student:

- Une v.a. X suit une loi de Student à n degrés de liberté si sa densité de probabilités est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}; \quad x \in \mathbb{R}$$

- On note $X \sim T(n)$
- Pour $n=1$, on retrouve la loi de Cauchy et on a:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \quad x \in \mathbb{R}$$

89

Loi de Student:

- On peut montrer que:

Si X est une v.a. normale centrée réduite $N(0,1)$, si Y est une v.a. de $\chi^2(n)$ khi-deux à n degrés de liberté, et si X et Y sont indépendantes, alors la v.a.

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \quad \text{suit une loi } T(n) \text{ de Student à } n \text{ degrés de liberté}$$

90

Loi de Student:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Student à n degrés de liberté est:

$$E(X)=0 \quad (\text{si } n>1)$$
 et elle n'est pas définie pour $n=1$.
- Sa variance est: $Var(X) = \frac{n}{n-2}$ (si $n>2$)
 et elle est infinie pour $n \leq 2$.

Prof. Mohamed El Merouani

91

Loi de Fisher-Snédecor:

- Une v.a. X suit une loi de Fisher-Snédecor à p et q degrés de liberté si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} x^{\frac{p}{2}-1}}{\left(1 + \frac{p}{q}x\right)^{\frac{p+q}{2}}}; \quad x \geq 0$$

- On note $X \sim F(p, q)$

92

Loi de Fisher-Snédecor:

- On peut montrer que:

Si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes distribuées respectivement suivant une loi de Khi-deux χ^2 à n_1 et n_2 degrés de liberté, alors la v.a.

$$F = \frac{\frac{1}{n_1} X_1}{\frac{1}{n_2} X_2} \text{ suit une loi de Fisher-Snédecor } F(n_1, n_2) \text{ à } n_1 \text{ et } n_2 \text{ degrés de liberté}$$

Prof. Mohamed El Merouani

93

Loi de Fisher-Snédecor:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Fisher-Snédecor $F(p, q)$ à p et q degrés de liberté est:

$$E(X) = \frac{q}{q-2}, \quad (q > 2)$$

- Sa variance est:

$$\text{Var}(X) = \frac{2q^2(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}, \quad (q > 4)$$

Prof. Mohamed El Merouani

94

Compléments à propos de la fonction génératrice des moments

Prof. Mohamed El Merouani

95

Théorème:

- On peut montrer que si une v.a. X admet une fonction génératrice des moments $M_X(t)$, alors elle admet des moments de tous les ordres (entiers positifs).
- La réciproque n'est pas toujours vraie: une v.a. peut admettre des moments de tout les ordres entiers positifs, sans admettre de fonction génératrice des moments.
- **Contre-exemple:** La loi Log-normale

Prof. Mohamed El Merouani

96

Théorème d'unicité:

- La fonction génératrice des moments d'une v.a. détermine la loi de cette variable.
- En d'autres termes, si deux v.a. admettent même fonction génératrice des moments, alors elles ont même loi.

Prof. Mohamed El Merouani

97

Théorème:

- Soient X et Y deux v.a. **indépendantes** dont chacune admet une fonction génératrice des moments ($M_X(t)$ et $M_Y(t)$, respectivement).
- Alors la somme $X+Y$ admet une fonction génératrice des moments et l'on a:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Prof. Mohamed El Merouani

98

Dém:

- On a: $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E[e^{tX} \cdot e^{tY}]$
- Comme X et Y sont indépendantes, les variables e^{tX} et e^{tY} le sont aussi. Donc:

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Remarque:

- La réciproque n'est pas vraie. Si pour deux v.a. X et Y on a: $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$ ceci n'implique pas forcément qu'elles sont indépendantes.

Prof. Mohamed El Merouani

99

Corollaire:

- Le produit de deux fonctions génératrices des moments est une fonction génératrice des moments.

Prof. Mohamed El Merouani

100

Addition de variables aléatoires indépendantes

101

Addition de variables aléatoires binomiales indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi binomiale $B(n,p)$ et Y une v. a. obéissant à une loi binomiale $B(m,p)$.
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:
 - La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi binomiale $B(n+m,p)$

Dém: à faire comme exercice!

102

Addition de variables aléatoires de Poisson indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\lambda)$ et Y une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\mu)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:
 - La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson $P(\lambda+\mu)$.

103

Addition de deux variables aléatoires Gamma indépendantes:

- Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives gamma de paramètres α_1 et α_2 et avec le même $\beta > 0$. Alors la somme $X+Y$ a pour loi gamma de paramètres $\alpha_1+\alpha_2$ et β .
- **Dém:** Il résulte de la forme de la fonction génératrice des moments.

104

Addition de variables aléatoires normales indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi normale $N(\mu_x, \sigma_x)$ et Y une v. a. obéissant à une loi normale $N(\mu_y, \sigma_y)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:
 - La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi normale $N(\mu_z, \sigma_z)$
 - ❖ de moyenne $\mu_z = \mu_x + \mu_y$
 - ❖ d'écart-type $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

Dém: est un exercice à faire!

105

- La v.a. $V=X-Y$ suit une loi normale $N(\mu_v, \sigma_v)$
- ❖ de moyenne $\mu_v = \mu_x - \mu_y$
- ❖ d'écart-type $\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

- Ce résultats peut se généraliser au cas de n variables indépendantes.

106

Addition de deux variables aléatoires Khi-deux indépendantes:

- Si X et Y sont deux v.a. indépendantes suivant des lois de Khi-deux respectivement à n_1 et n_2 degrés de liberté, alors la v.a. $Z=X+Y$ suit aussi une loi de Khi-deux de n_1+n_2 degrés de liberté.
- Ce résultat découle directement du fait que la loi de Khi-deux est une somme de carrés des lois normales centrées réduites indépendantes.