Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
Master M.A.F.
Semestre 2

T.D. de Méthodes de Monté-Carlo
Série n° 1

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy standard de fonction de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Donner un moyen simple de simuler cette loi par la méthode d'inversion.

Exercice 2 :
La loi demi-normale de paramètre $\sigma = 1$ a pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner l'algorithme de simulation de la loi de densité f par la méthode de rejet.
2. Donner la probabilité d'acceptation de l'algorithme.

Exercice 3 :
Donner l'algorithme d'inversion pour générer à partir de la variable aléatoire $\max(X_1, \cdots, X_n)$, avec $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F (on suppose que F^{-1} est connue).

Exercice 4 :
Soit X une variable aléatoire continue admettant pour fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec α et β des paramètres > 0. Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X et proposer une méthode de simulation de cette variable.

Exercice 5 :
Pour $a > 0$ donné, on désigne par f la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver une constante k telle que kf soit une densité de probabilité.
2. Trouver une constante $c_1 > 1$ telle que $kf(x) \leqslant c_1 \frac{\mathbb{I}_{[0,a]}(x)}{a}, x \in \mathbb{R}$
3. Trouver une constante $c_2 > 1$ telle que $kf(x) \leqslant c_2 \mathbb{I}_{[0,+\infty[} e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

4. On veut mettre en place une méthode de rejet pour simuler la loi de densité f en utilisant la loi uniforme sur $[0, a]$ ou la loi exponentielle de paramètre 1. Laquelle vaut-il mieux choisir ?

Exercice 6 :
Soit $\lambda \in]0, 1[$ fixé.

1. Utiliser la méthode de rejet pour simuler une variable X de Poisson de paramètre λ à partir d'une variable Y de loi
$$\forall f \in \mathbb{N}, P(Y = k) = (1 - \lambda)\lambda^n$$
2. Comment simuler simplement Y ?
3. Quelle est la probabilité de rejet ?

Exercice 7 :
Soit X une loi géométrique de paramètre p :
$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*$$

1. Rappeler la méthode classique de simulation de X à l'aide de tirages à pile ou face.
2. Proposer une autre méthode de simulation de cette loi utilisant la fonction de répartition.
3. Soit $\lambda > 0$ et T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit $X = \lceil T \rceil$ la partie entière par excès de T. Quelles valeurs peut prendre X ? Avec quelles probabilités ? En déduire un nouveau moyen de générer une loi géoétrique $\mathcal{G}(p)$.
4. Que donne la méthode d'inversion ?