Espaces Probabilisés

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

2019/2020

Introduction :

Expérience aléatoire :

- Les phénomènes liés au hasard ce sont des phénomènes si reproduits plusieurs fois, se déroulent différemment d'une expérience à l'autre et donnant un résultat imprévisible.
- On dit d'une expérience qu'elle est aléatoire si son résultat ne peut être prévu à priori.

Espace fondamental :

- L'ensemble de tous les résultats possibles, pour une expérience aléatoire donnée, est dit espace fondamental.
- Il est noté Ω.
- Un élément ω de Ω est dit "résultat élémentaire".

Événements :

- On peut identifier un événement aléatoire A avec la partie de Ω dont tous les éléments réalisent A.
- L'ensemble de tous les événements est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$.
- $\operatorname{Card} \mathcal{P}(\Omega) = 2^{\operatorname{Card} \Omega}$

Tribu ou σ-algèbre :

Soit Ω un espace fondamental.
Une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une tribu (ou σ-algèbre), si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$.
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un espace probabilisable.

Conséquences :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Preuve :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, et comme $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire, alors $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}$,
   d'où $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = (\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c \in \mathcal{A}$,
   par suite $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Définition :

- Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
- On appelle probabilité (ou mesure de probabilité) toute mesure P sur $\mathcal{A}$ telle que $P(\Omega) = 1$.
- On dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

- Une mesure sur $\mathcal{A}$:
  C'est une fonction d'ensemble positive, non identiquement égale à $+\infty$, σ-additive sur $\mathcal{A}$:
  Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, dont la réunion $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, on a :
  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$
- $P(\Omega) = 1$.

Remarque :

- Si P est une probabilité, observons que P est à valeurs dans $[0,1]$ puisque pour tout événement A, $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.
- De plus, $P(\emptyset) = 0$

Propriétés :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient A, B et $A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ des événements de $\mathcal{A}$, alors :

1. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Si $(A_n)_n$ est une suite croissante, ou décroissante, d'événements alors $P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$

Propriétés :

5. $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(Inégalité de Bonferroni)

Preuve :

1. $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c)$
   $\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$
   $\Rightarrow P(B) \geq P(A)$

Preuve :

2. $P(A\cup A^c)=P(\Omega)=1=P(A)+P(A^c)$
$\Rightarrow P(A^c)=1-P(A)$
3. $A\cup B=A\cup(A^c\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(A^c\cap B)$
mais, $B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$
donc $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$
d'où $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
4. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'événements, donc
$A_n\subset A_{n+1},\forall n\geq 1$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$
On a : $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}\cup\cdots$
$$=A_1\cup(A_2-A_1)\cup(A_3-A_2)\cup\cdots\cup(A_{n+1}-A_n)\cup\cdots$$

Preuve :

alors :

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1)+P(A_2-A_1)+P(A_3-A_2)+\cdots+P(A_{n+1}-A_n)+\cdots$$

(car les événements $A_1, A_2 - A_1, A_3 - A_2, \cdots$ sont deux à deux incompatibles)

et $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\lim_{n\to+\infty} A_n) =$

$$= \lim_{n\to+\infty} [P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \cdots + P(A_{n+1} - A_n)]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \text{ (car } A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n-1}))$$

Preuve :

• Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'événements, donc $A_{n+1} \subset A_n, \forall n \geq 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Les événements $(\Omega - A_1); (A_1 - A_2); (A_2 - A_3); \cdots$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion vaut $\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}$. d'où

$P(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}) = P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_3) + \cdots$

On peut écrire : $P(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}) =$

$\lim_{n\to+\infty}[P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_3) + \cdots P(A_{n-1} - A_n)]$

Comme $(\Omega - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) = \overline{A_n}$

On en déduit $P(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}) = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n})$

et comme $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$ et $P(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}) = 1 - P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n)$, alors

$P(\lim_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

Preuve :

Autre méthode :

$(A_n)_n$ suite décroissante $\Leftrightarrow$ $(A_n^c)_n$ suite croissante

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n^c) = P(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^c)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(1 - P(A_n)) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c) = P(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n})$$

$$= 1 - P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

$$\Rightarrow 1 - \lim_{n\to} P(A_n) = 1 - P(\lim_{n\to+\infty} A_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to+\infty} A_n)$$

Preuve :

5. Comme $A \cup B = A \cup (B - A)$
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$
Comme $(B - A) \subset B$, alors d'après (1) $P(B - A) \leq P(B)$
par suite $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
et plus généralement $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$
Soit $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k$
d'après (4) $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{n} P(A_n)$$

Preuve :

6. Inégalité de Bonferroni :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dém. par récurrence ;

$\underline{n=2}$, $P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

(déjà vue)

$\underline{n=3}$, $P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i<j}^{3} P(A_i A_j) + P(A_1 A_2 A_3)$

donc $P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) \geq \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i<j}^{3} P(A_i A_j)$

(car $P(A_1 A_2 A_3) \geq 0$).

Preuve :

Supposons qu'elle est vraie pour $n-1$,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n)$$

$$= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n))$$

Donc

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n-1} P(A_i A_j) + P(A_n) - P(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n))$

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n-1} P(A_i A_j) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n)$$

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j)$$

C.Q.F.D.

Inégalité de Boole :

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c)$$

Pour tout A et B événements.

Preuve :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A^c) + 1 - P(B^c) \leq 1 - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A^c) - P(B^c) \leq P(A \cap B) \blacksquare$$

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$. On définie la probabilité conditionnelle par :

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ est bien un espace probabilisé ; $P_B(.) = P(./B)$ est bien une probabilité.

Preuve :

1. $0 \leq P_B(A) \leq 1; \qquad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P_B(\Omega) = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
3. $P_B(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \frac{P(B \cap (\cup_{i=1}^{\infty} A_i))}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i)$

Probabilité conditionnelle :

Remarque :

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ avec $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$. Alors :
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2) = P(A_2/A_1)P(A_1)$

Théorème :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ avec $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ alors :

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/\cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Preuve :

- On a : $A_1 \supset A_1A_2 \supset \cdots \supset \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \supset \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$

et comme $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i > 0$
alors $P(A_1) > 0; P(A_1A_2) > 0; \cdots; P(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) > 0$
Donc $P(A_k/\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i)$ sont bien définies $(k = 2, \cdots, n)$.

Preuve :

• (Par récurrence)

Pour $\underline{n = 2}$ (c'est la définition)

Supposons la formule est vraie pour $n-1$ événements et démontrons qu'elle est vraie pour n.

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P\left((\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n \right)$$

$$= P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

$$= P(A_1 P(A_2/A_1) \cdots P\left(A_{n-1} / \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \right) P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

$\blacksquare$

Théorème des probabilités totales :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements (une partition de Ω : i.e. $\bigcup_n B_n = \Omega$ et $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$) tels que $P(B_n) > 0; \forall n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $P(A) = \sum_n P(B_n).P(A/B_n)$

Preuve :

Comme $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_n B_n) = \bigcup_n (A \cap B_n)$
avec $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$, pour $i \neq j$
On a : $P(A) = P(\bigcup_n (A \cap B_n) = \sum_n P(A \cap B_n)$

$$= \sum_n P(B_n).P(A/B_n)$$

$\blacksquare$

Probabilité conditionnelle :

Théorème de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(B_n)_n$ une suite d'évènements disjoints de $\mathcal{A}$ tels que $P(B_n) > 0$; $n = 1, 2, \dots$ et $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$. Soit $A \in \mathcal{A}$ avec $P(A) > 0$, alors :

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).P(A/B_i)}; \qquad j = 1, 2, \dots$$

Preuve :

On a : $\forall j, P(B_j/A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{P(A)}$
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i)P(A/B_i)$$

et alors, on obtient le résultat énoncé.

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Conséquence :

Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, les évènements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A/B) = P(A)$ ou $P(B/A) = P(B)$.
La réalisation de l'un des événements A ou B n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre.

Remarque :

Soit B un événement quelconque et A un énénement tel que $P(A) = 0$.
Comme $A \cap B \subset A$, alors $P(A \cap B) = 0$ et $P(A).P(B) = 0$.
Donc, les événements A et B sont indépendants.

Remarque :

Deux événements incompatibles A et B (avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$) ne sont pas indépendants.
En effet ; $P(A)P(B) > 0$ alors que $P(A \cap B) = 0$.

Proposition :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors :

1. A et $\overline{B}$ indépendants.
2. $\overline{A}$ et B indépendants.
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

Preuve :

1. On a : $P(A \cap \overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$
(car en général $P(E - F) = P(E) - P(E \cap F)$ et si $F \subset E$ alors $P(E - F) = P(E) - P(F)$)
$= P(A) - P(A)P(B)$ (car A et B sont indépendants)
$= P(A)[1 - P(B)]$
$= P(A)P(\overline{B})$
2. (Analogue ou par changement de rôles de A et de B !)
3. On a : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$
$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B)$
(car A et B sont indépendants)
$= P(\overline{A}) - P(B)[1 - P(A)] = P(\overline{A}) - P(B)P(\overline{A})$
$= P(\overline{A})[1 - P(B)] = P(\overline{A}).P(\overline{B})$

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits indépendants (ou indépendants dans leur ensemble) si pour toute partie $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ on a :
$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$; $k = 2, 3, \ldots, n$

Dans le cas de trois évènements A, B et C, on a : A, B, C sont indépendantes (dans leur ensemble) si, et seulement si,

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Remarque :

L'indépendance dans l'ensemble implique l'indépendance deux à deux. Mais, la réciproque n'est pas vraie.