Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
Master M.A.F.
Semestre 2

T.D. de Méthodes de Monté-Carlo
Série n° 2

Exercice 1 :
Un algorithme pour simuler une v.a. qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est basé sur le résultat suivant, à démontrer : Si $U_i, i = 1, 2, \cdots$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0,1])$, alors la v.a. $X = \max\{k : \Pi_{i=1}^{k} U_i \geqslant e^{-\lambda}\}$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 2 :
On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) de densité :

$$f(x, y) = yx^{y-1}e^{-y}\mathbb{I}_{\{y>0\}}\mathbb{I}_{\{0<x<1\}}$$

1. Quelle est la loi de Y ?
2. En déduire la loi de X sachant $Y = y$, puis $P(X \leqslant x/Y = y)$.
3. Proposer une méthode de simulation du couple (X,Y).

Exercice 3 :
On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) de densité :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{\frac{-y^2 x}{2}} e^{-\sqrt{x}}\mathbb{I}_{\{x>0\}}$$

1. Quelle est la loi de Y sachant $X = x$?
2. En déduire la loi de $\sqrt{X}$?
3. Proposer une méthode de simulation du couple (X,Y).

Exercice 4 :
Soient X et Y deux v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $2Y > (1 - X)^2$ a pour densité
$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x).$$
2. Soit S une v.a. de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, indépendante de couple (X, Y). Montrer que la loi conditionnelle de $(2S - 1)X$ sachant $2Y > (1 - X)^2$ suit une loi normale centrée réduite.
3. En déduire un algorithme de simulation de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 5 :
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que les variables aléatoires X et Y définies par :
$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V) \\ Y &= \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V) \end{aligned}$$
sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer que la loi du couple $(X,Y) = (\sqrt{U}\cos(2\pi V), \sqrt{U}\sin(2\pi V))$ est uniforme sur le disque unité.
3. On considère deux v.a. V_1 et V_2 i.i.d. de loi uniforme sur $[-1,1]$. On définit les variables :
$$W = R^2 = V_1^2 + V_2^2 \text{ et } C = \left(\frac{-2\ln(W)}{W}\right)^2$$
Montrer que $(X,Y) = (CV_1, CV_2)$ est une gaussienne bi-dimentionnelle centrée réduite.
4. Proposer une méthode de rejet pour simuler une variable uniforme sur le disque unité sans utiliser de fonctions trigonométriques. Quelle est la probabilité de rejet ?

Exercice 6 :
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F supposée inversible.

1. Comment simuler la loi de X conditionnement à $X > a$ à l'aide d'une méthode de rejet ? Que se passe-t-il lorsque a devient grand ?
2. Soit U une variable de loi uniforme sur $[0,1]$ et T définie par :
$$T = F^{-1}\left(F(a) + (1 - F(a))U\right).$$
Déterminer la fonction de répartition de T et en déduire une méthode de simulation de X conditionnellement à $X > a$. Comparer à la méthode de la question précédente.
3. Soit $a > 0$ fixé. On suppose que l'on cherche à simuler X de loi normale centrée réduite contionnellement à $X > a$. Proposer une méthode de rejet basée sur la loi exponentielle translatée de densité :
$$g_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}\mathbb{I}_{\{x>a\}}.$$
Comment choisir le paramètre λ ?