Lois usuelles (1)

Prof. Mohamed El Merouani

2019/2020

Lois usuelles discrètes :

Les lois discrètes les plus utilisées sont :

- Loi de Dirac
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi hypergéométrique
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Loi binomiale négative
- Loi multinomiale

Loi de Dirac :

- Soit a un nombre fixé.
  Soit X une v.a. prenant la valeur a avec $P(X = a) = 1$.
  On appelle loi de Dirac au point a la probabilité δ_a avec :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = a$$

  et sa variance est :

$$Var(X) = 0$$

Loi de Bernoulli :

- Une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p $(0 \leq p \leq 1)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = p$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Loi binomiale :

- Une v.a. discrètre X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \sim B(n,p)$ si

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; (0 \leq k \leq n)$$

- On vérifie que
$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$$
- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = np$$

- Sa variance est :
$$Var(X) = np(1-p)$$

Loi hypergéométrique :

- On dit qu'une v.a. discrète suit une loi hypergéométrique de paramètres n, a et b et on note $X \sim \mathcal{H}(n, a, b)$ si $P(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$ avec $\sup(0, n-b) \leq k \leq \inf(a, n)$
- Comme $\displaystyle\sum_k C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$
- L'espérance mathématique et la variance de la v.a. X suivant une loi hypergéométrique de paramètres n, a et b sont égales respectivement à :

$$E(X) = \frac{na}{a+b}$$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Loi de Poisson :

- Une v.a. discrètre X suit une loi de Poisson de paramètre λ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; $(\lambda > 0)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- On vérifie que c'est bien une loi de probabilité. En effet, $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$
- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \lambda$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \lambda$$

Loi géométrique :

- Une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre p si

$$\forall k \in X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1};$$

- On vérifie que c'est bien une loi de probabilité. En effet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Loi binomiale négative :

- Une v.a. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p et on note $X \sim NB(n,p)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad P(X=k) = C_{k+n-1}^{k} p^n (1-p)^k;$$

- On peut vérifier que c'est bien une loi de probabilité : $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n-1}^{k} p^n (1-p)^k = 1$
- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = n\frac{1-p}{p}$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{n}{p^2}(1-p)$$

Loi multinomiale :

- Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$ suit une loi multinomiale de paramètres $n, p_1, p_2, \cdots, p_m$ si

$$P(X_1 = n_1, \cdots, X_m = n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \cdots, p_m^{n_m}$$

où $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$

- L'espérance mathématique d'une composante X_i est :

$$E(X_i) = np_i; \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

- Sa variance est :

$$Var(X_i) = np_i(1 - p_i); \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

Lois usuelles continues :

Les lois continues les plus utilisées sont :

- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi gamma
- Loi de Weibull
- Loi de Pareto
- Loi bêta
- Loi de Laplace
- Loi de Cauchy
- Loi normale
- Loi normale centrée réduite
- Loi Log-normale
- Loi du Khi-deux
- Loi de Student
- Loi de Fisher-Snédecor

Loi uniforme :

- Une v.a. continue X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Loi exponentielle :

- Une v.a. continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \exp(\lambda)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Loi gamma :

- Une v.a. continue X suit une loi gamma de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

- Si $\alpha = 1$, on retrouve la loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$.

Loi de Weibull :

- Une v.a. continue X suit une loi de Weibull de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x^{\alpha}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}$$

Loi de Pareto :

Une v.a. X suit une loi de Pareto de paramètre α si sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c_0}\left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } c_0 \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha} & \text{si } c_0 \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} C_0; \quad (\alpha > 1)$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} C_0^2; \quad (\text{existe pour } \alpha > 2)$$

Loi bêta :

- Une v.a. continue X suit une loi bêta de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Loi de Laplace :

- Une v.a. X suit une loi de Laplace de paramétres α et $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}; \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

- Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\alpha)} & \text{si } x < \alpha \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\alpha)} & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \alpha$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Loi de Cauchy :

- Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètres α et $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}; \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

- Sa Fonction de répartition est :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x-\alpha}{\lambda}$$

- La loi de Cauchy n'admet ni espérance ni variance. Et il en va de même pour tout moment d'ordre supérieur.

Loi normale :

- Une v.a. X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma > 0$ et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

- Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt; \quad x \in \mathbb{R}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = m$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = \sigma^2$$

Loi normale centrée réduite :

- Une v.a. X suit une loi normale centrée réduite s'il suit une loi normale de paramètre $m = 0$ et $\sigma = 1$ et on note $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

- Sa fonction de répartition est définie par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad x \in \mathbb{R}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = 0$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = 1$$

Loi Log-normale :

Une v.a. X suit une loi Log-normale de paramètres m et $\sigma > 0$, et on note $X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma)$, si sa densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Loi du Khi-deux :

- Une v.a. X suit une loi de Khi-deux avec n degrés de liberté, et on note $X \sim \mathcal{X}^2(n)$, si sa densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est :

$$E(X) = n$$

- Sa variance est :

$$Var(X) = 2n$$

- Si $\frac{n}{2} = \alpha$ et $\frac{1}{2} = \beta$, on retrouve la loi Gamma.

Loi de Student :

Une v.a. X suit une loi de Student à n degrés de liberté si sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Pour $n = 1$, on a $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ et on retrouve la loi de Cauchy.
Son espérance mathématique est :

$$E(X) = 0$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{n}{n-2}, \qquad (n > 2)$$

Pour $n = 1$, on a $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ et on retrouve la loi de Cauchy.

Loi de Fisher-Snédecor :

Une v.a. X suit une loi de Fisher-Snédecor à p et q degrés de liberté si sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} x^{\frac{p}{2}-1}}{\left(1 + \frac{p}{q}x\right)^{\frac{p+q}{2}}}; \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{q}{q-2}, \qquad (q > 2)$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{2q^2(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}, \qquad (q > 4)$$