# Lois usuelles (2)

Prof. Mohamed El Merouani

2019/2020

# Plan de cette partie :

- Calcul des moments de quelques lois
- Loi d'une somme de v.a.
- Propriétés de quelques lois liées à la normale
- Changements de variables et leurs applications
- Approximations d'une loi de probabilité par une autre

Soit une v.a. discrète $X$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On sait que $E(X) = np$.

En effet ; $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Comme $\forall k = 1, 2, \cdots, n$, on a $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, l'espérance $E(X)$ s'écrit sous la forme : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$
$= np\,(p + (1-p))^{n-1} = np$

On aurait retrouvé ce résultat en remarquant que $X$ est la somme de $n$ variables $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$, de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p$ : $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. On a alors :
$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$

Soit une v.a. discrète $X$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On sait que $Var(X) = np(1-p)$.

En effet ; Comme $X$ est la somme de $n$ variables $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$, de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p$, on a :

$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$= Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n) = np(1-p)$. Ce résultat peut être retrouvé par un calcul : $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. On a :

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} [k(k-1)+k] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

En remarquant que $k(k-1)C_n^k = n(k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$, on a

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np \sum_{k=1}^{n} k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$= n(n-1)p^2 \left(p + (1-p)\right)^{n-2} + np \left(p + (1-p)\right)^{n-1} = n(n-1)p^2 + np$

On a donc $Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

# Calcul des moments de la loi de Poisson :

Soit $X$ una v.a. ($X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On sait que $E(X) = \lambda$.

En effet, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

Et on sait aussi que $Var(X) = \lambda$.

En effet, $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1] e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

et donc $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$

# Calcul des moments de la loi géométrique :

## Espérance mathématique :

Soit une v.a. $X$ qui suit une loi géométrique de paramètre $p$. On sait que son espérance mathématique est : $E(X) = \frac{1}{p}$.
En effet, $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$.
Comme $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$, on a $E(X) = p\frac{1}{(1-(1-p))^2}$.

## Variance :

Sa variance est : $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
En effet, $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2p(1-p)^{k-1}$
$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}$
$= p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-2} + \frac{1}{p}$
Comme $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^3}$ pour $|x| < 1$, on a
$E(X^2) = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$ et donc
$Var(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

# Calcul des moments de la loi uniforme :

Soit une v.a. continue $X$ suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$
Son espérance mathématique est : $E(X) = \frac{a+b}{2}$
En effet, $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$
$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$

Sa variance est : $Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$. En effet,
$E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$
$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$
$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$

# Calcul des moments de la loi exponentielle :

Soit une v.a. continue $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$
Son espérance mathématique est : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
En effet, $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx$
$= [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$

Sa variance est : $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
En effet, $E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx$
$= [-x^2e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + 2\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = 2([\frac{-x}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx)$
$= 2(0 + \frac{1}{\lambda}[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^{+\infty}) = \frac{2}{\lambda^2}$
Donc $Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

# Calcul des moments de la loi de Pareto :

## Espérance mathématique :

Soit une v.a. $X$ suit une loi de Pareto de paramètre $\alpha$
Son espérance mathématique est : $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1}C_0; \quad (\alpha > 1)$
En effet, $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{\alpha}{c_0}\int_{c_0}^{+\infty} x\left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha+1}dx$
$= \frac{\alpha}{c_0}{c_0}^{\alpha+1}\displaystyle\int_{c_0}^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \alpha c_0^\alpha\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{c_0}^{+\infty}$
<u>si $1-\alpha \geq 0$</u> :
alors $x^{1-\alpha} \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ et par suite $E(X)$ n'existe pas.
<u>si $1-\alpha < 0$</u> :
alors $x^{1-\alpha} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$
et $E(X) = \alpha c_0^\alpha\left(0 - \frac{c_0^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right)$
donc $E(X) = \frac{\alpha c_0^\alpha c_0^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{\alpha c_0}{\alpha-1}$ avec $\alpha > 1$

**Variance :**

Sa variance est : $Var(X) = \frac{\alpha C_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ (existe pour $\alpha > 2$)

En effet, $E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{\alpha}{c_0}\int_{c_0}^{+\infty} x^2 \left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha+1} dx$

$= \frac{\alpha}{c_0} c_0^{\alpha+1} \displaystyle\int_{c_0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha c_0^{\alpha} \int_{c_0}^{+\infty} x^{1-\alpha} dx = \alpha c_0^{\alpha}\left[\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{c_0}^{+\infty}$

<u>si $2-\alpha \geq 0$</u> :

alors $x^{2-\alpha} \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ et par suite $E(X^2)$ n'existe pas.

<u>si $2-\alpha < 0$</u> :

alors $x^{2-\alpha} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ et $E(X^2) = \alpha c_0^{\alpha}\left[0 - \frac{c_0^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right] = \frac{\alpha c_0^2}{\alpha-2}$

Donc $Var(X) = \frac{\alpha c_0^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha c_0}{\alpha-1}\right)^2 = \frac{\alpha C_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ (existe pour $\alpha > 2$)

# Calcul des moments de la loi normale :

Soit une v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Son espérance mathématique est $E(X) = 0$ et sa variance est $Var(X) = 1$.

En effet, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ (car $x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une fonction impaire).

Comme $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( 0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \right) = 1$

et $E(X) = 0$, on en déduit $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1$.

Si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $E(Y) = m$.

En effet, on a $Z = \frac{Y-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

D'où $E(Z) = 0$, par suite $\frac{1}{\sigma} E(Y) - \frac{m}{\sigma} = 0$ et $E(Y) = m$.

De même, $Var(Z) = \frac{1}{\sigma^2} Var(Y) = 1$ et donc $Var(Y) = \sigma^2$.

# Loi d'une somme de v.a. discrètes :

- La probabilité $P(Z = k)$ de la somme $Z = X + Y$ de deux v.a. discrètes $X$ et $Y$ est la somme des probabilités $P(X = i, Y = j)$ étendue à tous les couples $(i, j)$ liés par la relation $k = i + j$.

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i, Y = j)$$

- Si les v.a. $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a :

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i)P(Y = j)$$

# Somme de deux v.a. binomiales :

Soient deux v.a. $X$ et $Y$ indépendantes, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

On a : $P(X+Y=k) = \sum\limits_{A} P(X=i, Y=j)$ où

$A = \{(i,j)/0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, i+j=k\}$ $P(X+Y=k) =$
$\sum_A P(X=i)P(Y=j) = \sum_A C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^j p^j (1-p)^{m-j}$
$= \sum_A C_n^i C_m^j p^{i+j} (1-p)^{n+m-i-j}$ or $\sum_A C_n^i C_m^j = \sum_{k=0}^{n+m} C_n^i C_m^j = C_{n+m}^k$
d'où $P(X+Y=k) = C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}$

On peut énoncer ce résultat plus simplement en affirmant que $X+Y$ est la somme de $n+m$ variables de Bernoulli de même paramètre $p$. C'est donc une variable binomiale $\mathcal{B}(n+m,p)$.

# Somme de deux v.a. de Poisson :

Soient deux v.a. $X$ et $Y$ indépendantes suivant des lois de Poisson, $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, alors leur somme $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson $Z \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

**En effet :**

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i).P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{{\lambda_1}^i}{i!} e^{-\lambda_2} \frac{{\lambda_2}^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{{\lambda_1}^i {\lambda_2}^{k-i}}{i!(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{{\lambda_1}^i {\lambda_2}^{k-i}}{k!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$$

# Loi d'une somme de v.a. continues :

Soient $X$ et $Y$ deux v.a. continues. Soit $Z = X + Y$. On veut détermininer la fonction de répartition de la v.a. $Z$. On a :
$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_A f(x, y)dxdy$
où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq z\}$.
Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_A f(x, y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\right] f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z - x)f_X(x)dx \end{aligned}$$

On peut trouver de la même façon : $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z - y)f_Y(y)dy$
En dérivant $F_Z(z)$ par rapport à $z$, on trouve
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy$
ou encore $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z - x)f_X(x)dx$

Soient deux v.a. indépendantes $X$ et $Y$ qui suivent des lois exponentielles, $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{E}xp(\lambda_2)$. On déterminera :

1. La fonction de répartition $F(x, y)$ du couple $(X, Y)$
2. La densité de probabilité de la somme $Z = X + Y$

**En effet :**

Soient

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et } f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

On a, la fonction de répartition du couple $(X, Y)$ est :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv = \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 v} du dv$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 y}\right)$$

# Somme de deux v.a. exponentielles :

Donc la fonction de répartition du couple $(X, Y)$ est :

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 y}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• La densité de $Z = X + Y$ s'écrit :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{-\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{\substack{x \geq 0 \\ z-x \geq 0}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)} dx$$

Si $z \geq 0$, on a :

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}\right)$$

# Somme de deux v.a. exponentielles :

Pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}\right) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2$

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 z} dx = \lambda_1^2 z e^{-\lambda_1 z} \text{ si } z \geq 0$$

et on a donc

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda_1^2 z e^{-\lambda_1 z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Donc, si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1)$, alors $X + Y \sim \Gamma(2, \lambda_1)$.

En général, Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des v.a. indépendantes suivant la même loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$, alors la v.a. $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.

# Somme de deux v.a. normales :

Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a. suivant des lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ respectivement. La v.a. $X_1 + X_2$ suit, alors, aussi une loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

On montre ce résultat pour les v.a. $Y_1 = \frac{X_1 - m_1}{\sigma_1}$ et $Y_2 = \frac{X_2 - m_2}{\sigma_2}$ qui suivent toutes deux une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. La densité de $Z = Y_1 + Y_2$ s'écrit :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx - x^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x - \frac{z}{2})^2} dx$$

En posant $x - \frac{z}{2} = u$, on a : $f(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2}}$ qui est la densité d'une v.a. suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$. Ce résultat peut être généralisé à la somme de plusieurs v.a. $X_i; (i = 1, 2, \cdots, n)$

## Proposition :

Soit $\Phi$ la fonction de répartition de $X$ v.a. qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a : $\Phi(a) = 1 - \Phi(-a)$

**Preuve :**

Comme $\Phi(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et $\Phi(a) + \Phi(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

# Loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ :

**Remarque :**

On peut ramener tout calcul sur la fonction de répartition d'une v.a. normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ à un calcul sur la fonction de répartition $\Phi(x)$, d'une v.a. normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

En effet, si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $P(X \leq a) = P(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{a-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-m}{\sigma})$
**Tables statistiques :** Tois tables relatives à la loi normale sont utilisées. La table de la densité, celle de la fonction de répartition $\Phi(x)$ et la table des fractiles. Les valeurs de $\Phi(x)$ sont tabulées (sont données sur une table statistique). C'est une table à double entrée pour laquelle on détermine la valeur de $P(Z \leq z)$ où $z \in [0; 3, 5]$ donnée. On cherche : (i) La ligne correspondante à la partie entière et au 1er chiffre décimal de $z$, (ii) La colonne correspondante au 2ème chiffre décimal de $z$, puis à l'intersection de cette ligne et de cette colonne, on lit la probabilité cherchée.

# Loi de Khi-deux :

Soient $n$ v.a. indépendantes $X_i \sim \mathcal{N}(0,1); (i = 1, 2, \cdots, n)$. La v.a. $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ suit une loi du Khi-deux à $n$ degrés de liberté. On note $Y \sim \mathcal{X}_n^2$.

Pour la démonstration, on cherche d'abord la loi de $X_1^2$, puis on utilise un raisonnement par récurrence.

i) Soit $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. On détermine la loi de $Z = X_1^2$. On a $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X_1^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X_1 \leq \sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z})$.

La densité de probabilité de $Z$ est :

$f_1(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}(f_X(\sqrt{z}) - f_X(-\sqrt{z})) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}}\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}z^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}$.

ii) Soit $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$. On détermine la loi de $Z = X_1^2 + X_2^2$. Soit $f_2(z)$ la densité de $Z$. On a

$f_2(z) = \int_0^z f_1(y)f_2(z-y)dy = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi}\int_0^z y^{-\frac{1}{2}}(z-y)^{-\frac{1}{2}}dy$

# Loi de Khi-deux :

En posant $y = tz$, on obtient :
$f_2(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.
Avec $t = \cos^2\theta$, il vient $f_2(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\theta = \frac{1}{2\Gamma(\frac{2}{2})}z^{\frac{2}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}$
iii) Soit $X_3 \sim \mathcal{N}(0,1)$. On détermine la loi $Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$. Soit $f_3(z)$ la densité de $Z$. On a :
$f_3(z) = \int_0^z f_2(y)f_1(z-y)dy = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^z (z-y)^{-\frac{1}{2}}dy$
En posant $y = tz$, on obtient :

$$f_3(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{\sqrt{2\pi}}z^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})}z^{\frac{3}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}$$

iv) On suppose que la v.a. $U = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2$ suit une loi du $\mathcal{X}_{n-1}^2$ et on montre que la v.a. $Z = U + X_n^2$ suit une loi du $\mathcal{X}_n^2$.

# Loi de Khi-deux :

La densité de $\mathcal{X}_1^2$ est $f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$ ;
celle de $\mathcal{X}_{n-1}^2$ est $f_{n-1}(y) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} y^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$. On a alors,

$$f_n(z) = \int_0^z f_{n-1}(y) f_1(z-y) dy = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{2\pi}} \int_0^z (\frac{y}{2})^{\frac{n-1}{2}-1} (z-y)^{-\frac{1}{2}} dy$$

En posant $y = tz$, on obtient :

$$f_n(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n-1}{2}-1}} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n-1}{2}-1}} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n-1}{2}-1}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

car $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. Sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, il vient
$f_n(z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-z}$.

# Loi de Student et Loi de Fisher :

On peut montrer que :

**Loi de Student :**

Soient deux v.a. indépendantes $X$ et $Y$ telles que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{X}_n^2$. La v.a. $T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit une loi de Student à $n$ degrés de liberté.

On détermine d'abord la densité de $\sqrt{\frac{Y}{n}}$ puis celle $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$.

On peut montrer, aussi, que :

**Loi de Fisher :**

Soient deux v.a. indépendantes $X$ et $Y$ telles que $X \sim \mathcal{X}_p^2$ et $Y \sim \mathcal{X}_q^2$. La v.a. $F(p,q) = \frac{\frac{X}{p}}{\frac{Y}{q}}$ suit une loi de Fisher à $p$ et $q$ degrés de liberté.

On détermine d'abord les densités de $\frac{X}{p}$ et de $\frac{Y}{q}$ et puis la densité de leur rapport $\frac{X}{p} / \frac{Y}{q}$.

# Changement de variables :

Soient deux v.a. $X$ et $Y$ absolument continues. La densité de probabilité du couple $(X, Y)$ est $f(x, y)$. On considère la transformation $U = U(X, Y)$ et $V = V(X, Y)$ et la transformation inverse $X = X(U, V)$ et $Y = Y(U, V)$.
La fonction densité de probabilité du couple $(U, V)$ est :

$$g(u, v) = f(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = f\left[x(u, v), y(u, v)\right] |J|$$

où $J$ est le déterminant de Jacobi (ou Jacobien) :

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

# Application à la détermination de la loi de la somme de deux v.a. continues :

Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes absolument continues. A l'aide de la formule précédente, calculons la densité de probabilité de $Z = X + Y$.
En effet, comme on a $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ et en considérant la transformation $\left\{\begin{array}{ll} x = & x \\ z = & x+y \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{ll} x = & x \\ y = & z-x \end{array}\right.$, on obtient :

$$g(x,z) = f(x, z-x)|J| = f_X(x)f_Y(z-x) \text{ où } J = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array} \right| = 1$$

La fonction $h(z)$ densité de probabilité de $Z$ sécrit donc :

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

# Application à la détermination de la loi du produit de deux v.a. continues :

Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes dont la densité de probabilité du couple $(X, Y)$ est $f(x, y)$. Calculons la densité de probabilité de $Z = XY$.

On considére la transformation $\left\{ \begin{array}{ll} x = & x \\ z = & xy \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{ll} x = & x \\ y = & \frac{z}{x} \end{array} \right.$. Pour $x \neq 0$, on a :

$$g(x, z) = f(x, \frac{z}{x})|J| \text{ où } J = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{x}$$

On donc $g(x, z) = f_X(x) f_Y(\frac{z}{x})|\frac{1}{x}|$ et la densité de probabilité de $Z$ sécrit :

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x})|\frac{1}{x}|dx$$

Si $N = a + b \to \infty$, $\mathcal{H}(n, a, b) \to \mathcal{B}(n, \frac{a}{N})$.
On suppose que les proportions $\frac{a}{N}$ et $\frac{b}{N}$ restent fixes. On a

$$P(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n} = \frac{\frac{a!}{k!(a-k)!}\,\frac{b!}{(n-k)!(b-n+k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$= \frac{\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+k+1)}{k!(n-k)!}}{\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{n!}}$$

$$= \frac{n!a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+k+1)}{k!(n-k)!N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}$$

Comme $N \to \infty$, $n$ et $k$ sont fixés, $a$ et $b \to \infty$ car $\frac{a}{N}$ et $\frac{b}{N}$ restent fixés). On obtient :

$$a(a-1)\cdots(a-k+1) = a^k(1 - \frac{1}{a})\cdots(a - \frac{k+1}{a}) \sim a^k$$

# Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale :

$$b(b-1)\cdots(b-n+k+1) = b^{n-k}(1-\frac{1}{b})\cdots(1-\frac{n-k-1}{b}) \sim b^{n-k}$$

$$N(N-1)\cdots(N-n+1) = N^n(1-\frac{1}{N})\cdots(1-\frac{n-1}{N}) \sim N^n$$

Si $N$ est grand

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n} \sim \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{a^k b^{n-k}}{N^n}$$

et

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{a^k b^{n-k}}{N^k N^{n-k}} = C_n^k \left(\frac{a}{N}\right)^k \left(\frac{b}{N}\right)^{n-k}$$

$$= C_n^k \left(\frac{a}{N}\right)^k \left(1-\frac{a}{N}\right)^{n-k}$$

En pratique, cette approximation est vraie dès que $\frac{n}{N} < 0,1$.

# Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson :

La loi de Poisson peut être décrite comme étant la limite de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque $n \to \infty, p \to 0$ et $np \to \lambda$ (où $\lambda$ est une constante).

**En effet ;**

$$\lim C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \lim \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \lim \frac{(np)^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\frac{(1-p)^n}{(1-p)^k}$$

$$= \lim \frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

car $\lim(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$ et $\lim(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} = 1$.
En pratique, cette approximation est vraie dès que $n > 50$ et $p < 0,1$.

# Approximation de la loi binomiale par la loi normale :

Si les conditions suivantes pour $n$ et $p$ sont réalisées :

- $n$ est grand ($n \geq 20$).
- $p$ et $q$ ne sont pas trop petites (pratiquement $npq \geq 3$)
  La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approximée par une loi normale $\mathcal{N}(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq})$

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right\}$$

- La quantité $t = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ suit une loi normale centrée réduite.

# Approximation de la loi de Poisson par la loi normale :

- Soit une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
- Si $\lambda \geq 15$, alors cette loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approximée par une loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.
- Alors, la variable $T = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ suit une loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.