Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
Master M.A.F.
Semestre 2

T.D. de Méthodes de Monté-Carlo
Corrigés de la série n° 2

Exercice 1 :
Soit $U_i, i = 1, 2, \cdots$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0,1])$

$$X = \max\{k : \Pi_{i=1}^{k} U_i \geqslant e^{-\lambda}\} \Rightarrow X = \max\{k : -\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \leqslant \lambda\}$$

$$U_i \sim \mathcal{U}([0,1]) \Rightarrow -\ln(U_i) \sim \mathcal{E}(1)$$
$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \sim \Gamma(k,1)$$

On rappelle, densité de $\Gamma(k,1)$ est $f(t) = \frac{e^{-t}t^{k-1}}{\Gamma(k)} \mathbb{I}_{\{t \geqslant 0\}}$ et $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour k entier.
On calcul la probabilité de l'événement $(X = k) = \left(-\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \leqslant \lambda, -\sum_{i=1}^{k+1} \ln(U_i) > \lambda\right)$.
On a : $P(X = k) = P(-\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \leqslant \lambda).P\left(-\sum_{i=1}^{k+1} \ln(U_i) > \lambda / -\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \leqslant \lambda\right)$

$$P(X = k) = \int_0^{\lambda} P(-\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \leqslant t).P\left(-\sum_{i=1}^{k+1} \ln(U_i) > \lambda / -\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \leqslant t\right) dt$$

$$P(X = k) = \int_0^{\lambda} P(-\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i) \leqslant t).P\left(-\ln(U_{k+1}) > \lambda - t\right) dt$$
$$= \int_0^{\lambda} \frac{e^{-t}t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda+t} dt = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 2 :

1. La densité marginale de Y est donnée par :
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 yx^{y-1}e^{-y}\mathbb{I}_{\{y>0\}}dx = e^{-y}\mathbb{I}_{\{y>0\}}$$
Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
2. La densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est égale à
$$f(x/Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = yx^{y-1}\mathbb{I}_{\{0<x<1\}}, \text{ pour tout } y > 0 \text{ fixé}$$
C'est une loi bêta.
Concernant, donc, la fonction de répartition conditionnelle, pour tout x compris entre 0 et 1, on a :
$$P(X \leqslant x/Y = y) = \int_0^x f(x/Y = y)dx = x^y$$

3. La variable y étant fixé, on peut inverser cette fonction de répartition conditionnelle et appliquer la méthode d'inversion. Puisque $u = x^y \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{y}}$.
   On en déduit que pour simuler une réalisation du couple (X, Y), il suffit de commencer par générer Y suivant une loi exponentielle de paramètre 1 puis à génèrer U suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et enfin à poser $X = U^{\frac{1}{Y}}$.

Exercice 3 :
On a :

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{\frac{-y^2 x}{2}} e^{-\sqrt{x}} \mathbb{I}_{\{x>0\}}$$

1. Pour déterminer la loi de Y sachant $X = x$, on utilise le symbole "$\propto$" (comme en statistique bayésienne) et on reconnaît immédiatement une loi normale centrée :

$$f(y/X = x) \propto e^{\frac{-xy^2}{2}} \Rightarrow \text{ Loi de } Y/X = x \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{x})$$

2. La règle de Bayes donne :

$$f_X(x) = \frac{f(x,y)}{f(y/X = x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \mathbb{I}_{\{x>0\}}$$

   d'où l'on déduit la fonction de répartition de la variable $\sqrt{X}$, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = P(\sqrt{X} \leqslant x) = P(X \leqslant x^2) = \int_0^{x^2} f(t)dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}} dt = 1 - e^{-x}$$

   et $\sqrt{X} \sim \mathcal{E}xp(1)$.
3. Pour simuler le couple (X,Y) :
   On simule $Z \sim \mathcal{E}xp(1)$, puis on considère $X = Z^2$
   et on simule $Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{X})$.

Exercice 4 :
Soient X et Y deux v.a. indépendantes qui suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Donc on a $f_X(x) {=} e^{-x} \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}$ et $f_Y(y) {=} e^{-y} \mathbb{I}_{\{y \geqslant 0\}}$

1. On rappelle que pour édentifier la loi d'une v.a., il suffit de savoir calculer les espérances de fonctions de cette v.a.(pour toute fonction dans un ensemble de fonctions tests). Nous prenons donc ψ une fonction de l'ensemble des fonctions positives, continues, bornées de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   Nous cherchons la loi conditionnelle de X sachant $2Y > (1 - X)^2$. Donc, soit,

$$E(\psi(X)/\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}) = \frac{E(\psi(X)\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}})}{E(\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}})}$$

   Alors

$$\begin{aligned} E(\psi(X)\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x) \mathbb{I}_{\{2y>(1-x)^2\}} e^{-x} \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}} e^{-y} \mathbb{I}_{\{y \geqslant 0\}} dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(x) \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{\{2y>(1-x)^2\}} e^{-y} dy \right) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(x) \left(\int_{\frac{(1-x)^2}{2}}^{+\infty} e^{-y} dy \right) e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(x) \left(e^{-\frac{(1-x)^2}{2}} \right) e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(x) \exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2} \right) dx$$

En particulier $E(\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right) dx$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2}$$

Donc $E(\psi(X)/\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}) = \frac{E(\psi(X)\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}})}{E(\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}})} = \int_0^{+\infty} \psi(x) \frac{2e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$
D'où la loi conditionnelle de X sachant $2Y > (1-X)^2$ a bien pour densité

$$x \mapsto \frac{2e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x).$$

2. Soit ψ une fonction de l'ensemble des fonctions positives, continues, bornées de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$E\left(\psi((2S-1)X)/\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}\right) = \frac{E\left(\psi((2S-1)X)\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}\right)}{E(\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}})}$$

Puisque S est indépendante de X et Y, on a :

$$E\left(\psi((2S-1)X)\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}\right) = \frac{1}{2}E(\psi(X)\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}) + \frac{1}{2}E(\psi(-X)\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}})$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \psi(x) \exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \psi(-x) \exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right) dx \text{(en utilisant } 1^\circ\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right) dx$$

Donc $E\left(\psi((2S-1)X)/\mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$
Donc la loi conditionnelle de $(2S-1)X$ sachant $2Y > (1-X)^2$ est bien la normale centrée réduite.

3. Nous proposons, donc, un algorithme de simulation de la loi $\mathcal{N}(0,1)$:
Nous tirons S_i, X_i, Y_i (respectivement de lois $\mathcal{B}(\frac{1}{2}); \mathcal{E}xp(1); \mathcal{E}xp(1)$) jusqu'à ce que

$$2Y_i > (1-X_i)^2.$$

Soit g la densité de (S_i, X_i, Y_i) (qui ne dépend pas de i). Soit f la densité de (S_i, X_i, Y_i) conditionnellement à $2Y > (1-X)^2$.

$$f(s,x,y) = \frac{g(s,x,y)}{P(2Y > (1-X)^2)} \times \mathbb{I}_{\{2Y>(1-X)^2\}}$$

En particulier

$$f \leqslant \frac{1}{P(2Y > (1-X)^2)} . g$$

Nous prenons pour $c = \frac{1}{P(2Y>(1-X)^2)}$. Quel est l'algorithme de rejet qui nous permettrait de simuler la loi conditionnelle voulue ? Soit (W_i) les variables i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$ utilisées dans l'algorithme de rejet. La condition d'arrêt dans la méthode de rejet est $W_i \leqslant \frac{f(S_i,X_i,Y_i)}{cg(S_i,X_i,Y_i)}$,
c'est-à-dire $W_i \times g(S_i, X_i, Y_i) \leqslant g(S_i, X_i, Y_i)\mathbb{I}_{\{2Y_i>(1-X_i)^2\}}$,
ce qui est équivalent à $2Y_i > (1 - X_i)^2$.
D'où l'algorithme de rejet pour simuler suivant la loi voulue.

Exercice 5 :
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Soit ψ une fonction de l'ensemble des fonctions positives, continues, bornées de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$E(\psi(X,Y)) = E(\psi(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)))$$
$$= \iint_{]0,1]\times[0,1]} \psi(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v)) f_{(U,V)}(u,v)dudv$$
$$= \iint_{]0,1]\times[0,1]} \psi(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v)) f_U(u)f_V(v)dudv$$
$$= \iint_{]0,1]\times[0,1]} \psi(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v)).1.dudv$$

Nous effectuons le changement de variables suivant :

$$r = \sqrt{-2\ln(u)}, \quad \theta = 2\pi v$$
$$\forall u \in]0,1] \text{ et } v \in [0,1]$$

L'application

$$g_1 :]0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$$
$$(u, v) \longmapsto (r, \theta) = (\sqrt{-2\ln(u)}, 2\pi v)$$

est une bijection de classe C^1 de réciproque :

$$g_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \longrightarrow]0,1] \times [0,1]$$
$$(r, \theta) \longmapsto (u, v) = (e^{-\frac{r^2}{2}}, \frac{2\pi}{\theta})$$

Le jacobbien correspondant est :

$$J_{g_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{u\sqrt{-2\ln(u)}} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{u\sqrt{-2\ln(u)}}$$

Donc $$dr d\theta = |J_{g_1}| dudv$$

Par conséquent $$dudv = \frac{u\sqrt{-2\ln(u)}}{2\pi} dr d\theta$$
$$= \frac{|r|e^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi} dr d\theta$$
$$= \frac{re^{\frac{-r^2}{2}}}{2\pi} dr d\theta$$

Le jacobien de g_1 ne s'annule jamais sur $]0,1] \times [0,1]$. Il découle de la formule du changement de variable que

$$E(\psi(X,Y)) = \iint_{]0,1]\times[0,1]} \psi(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v))dudv$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} \psi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{re^{\frac{-r^2}{2}}}{2\pi}drd\theta$$

Nous effectuons maintenant à nouveau le changement de variables :

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

$$r \in \mathbb{R}^+, \ \theta \in [0, 2\pi]$$

(c'est le passage usuel en coordonnées polaires). Le jacobien correspondant est :

$$J_{g_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Donc $dxdy = rdrd\theta$

$$E(\psi(X,Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y)\frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}}{2\pi}dxdy$$

On conclut que la densité du couple (X,Y) vérifie :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi}$$

Nous en tirons les densités marginales de X et Y :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi}dy$$

$$= \frac{e^{-(x^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(y^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}dy = \frac{e^{-(x^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

De même on trouve : $f_Y(y) = \frac{e^{-(y^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}$
On voit clairement que $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$
D'où X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Remarque : Pour simuler une variable X de loi $\mathcal{N}(0,1)$, il suffit donc de prendre $U, V \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendantes et poser $X = \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$.
Pour simuler une variable X de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, il suffit de prendre $X = \mu + \sigma Y$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. Pour toute fonction test ψ positive, continue, bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on a par le théorème de transfert :

$$E(\psi(X,Y)) = E(\psi(\sqrt{U}\cos(2\pi V), \sqrt{U}\sin(2\pi V)))$$

$$= \iint_{[0,1]^2} \psi(\sqrt{u}\cos(2\pi v), \sqrt{u}\sin(2\pi v))dudv$$

Le changement de variables $(r,\theta) = (\sqrt{u}, 2\pi v)$ donne :

$$E(\psi(X,Y)) = \iint_{[0,1]\times]0,2\pi]} \psi(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{1}{\pi} r dr d\theta$$

En notant $\mathcal{D}$ le disque unité, la réciproque du classique changement en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, donne finalement $E(\psi(X,Y)) = \iint_{\mathcal{D}} \psi(x,y)\frac{1}{\pi}dxdy$.
Ce qui montre que (X,Y) suit la loi uniforme sur le disque unité.

Remarque : Au passage, on voit que si l'on tire un point selon cette loi, sa distance R à l'origine est la racine carré d'une loi uniforme et a donc pour densité $f(r) = 2r\mathbb{I}_{[0,1]}(r)$. On constate logiquement que plus r est proche de 1 et plus cette densité est élevée (penser à la surface de la couronne de rayons respectifs r et $r + dr$).

3. On prend une fonction ψ positive, continue, bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et on calcul

$$E(\psi(CV_1, CV_2)) = \iint_{(v_1,v_2)\in\mathcal{D}} \psi\left(\left(\frac{-2\ln(v_1^2+v_2^2)}{v_1^2+v_2^2}\right)^{1/2} v_1, \left(\frac{-2\ln(v_1^2+v_2^2)}{v_1^2+v_2^2}\right)^{1/2} v_2\right)\frac{1}{\pi}dv_1dv_2$$

Soit le changement de variables : $v_1 = r\cos\theta$; $v_2 = r\sin\theta$

$r \in [0,1]$; $\theta \in [0, 2\pi[$

La matrice jacobienne correspondante est

$$J_1(v_1,v_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

de déterminant $r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Donc $E(\psi(CV_1, CV_2)) = \int_0^1\int_0^{2\pi} \psi\left(\left(\frac{-2\ln r^2}{r^2}\right)^{1/2} r\cos\theta, \left(\frac{-2\ln r^2}{r^2}\right)^{1/2} r\sin\theta\right)\frac{r}{\pi}drd\theta$

$$E(\psi(CV_1, CV_2)) = \int_0^1\int_0^{2\pi} \psi\left(\left(-2\ln r^2\right)^{1/2} r\cos\theta, \left(-2\ln r^2\right)^{1/2} r\sin\theta\right)\frac{r}{\pi}drd\theta$$

On considère maintenant le changement de variables : $r = \sqrt{x}$, $\theta = 2\pi t$, $(x \in [0,1]$, $t \in [0,1])$

La matrice jacobienne est

$$J_2(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}$$

de déterminant $\pi/\sqrt{x}$

Donc $E(\psi(CV_1, CV_2)) = \int_0^1\int_0^1 \psi\left((-2\ln x)^{1/2} r\cos(2\pi t), (-2\ln x)^{1/2} r\sin(2\pi t)\right)dxdt$

D'où, d'après Box-Muller, (CV_1, CV_2) suit une loi normale bi-dimentionnelle centrée réduite.

4. Il suffit de simuler (U_1, U_2) un couple i.i.d. selon la loi uniforme sur $[0,1]$ pour en déduire un point $(X,Y) = (2(U_1 - \frac{1}{2}), 2(U_2 - \frac{1}{2}))$ distribué uniformement dans le carée unité. Il ne reste plus qu'à tester si $X^2 + Y^2 > 1$ ou < 1 pour voir s'il se situe dans le disque unité. La probabilité d'acceptation correspond naturellement au rapport des surfaces et vaut $\frac{\pi}{4}$, de l'ordre de $\frac{3}{4}$.

Exercice 6 :
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F supposée bijective.

1. Pour simuler la loi de X conditionnement à $X > a$ à l'aide d'une méthode de rejet, il suffit de simuler Y_1 suivant la loi de X, puis de poser $X = Y_1$ si $Y_1 > a$, et de recommencer avec une nouvelle variable Y_2 sinon, et ainsi de suite jusqu'à obtenir $Y_N > a$. Il s'ensuite que la variable aléatoire N suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{m} = P(X > a)$. Le nombre d'essais moyen pour obtenir une réalisation de loi de $X/X > a$ est donc égal à $\frac{1}{P(X>a)}$, quantité qui tend vers 0 quand a tend vers l'infini. Cette méthode est donc à proscrire lorsque a se situe dans la queue de la distribution de X.
2. Soit U une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$ et T définie par :

$$T = F^{-1}\left(F(a) + (1 - F(a))U\right)$$

Puisque $F(a) + (1 - F(a))U \geqslant F(a)$, la variable T est supérieure à la valeur a. Plus précisément sa fonction de répartition F_T vaut, pour tout $t > a$,

$$F_T(t) = P(T \leqslant t) = P(F^{-1}(F(a) + (1 - F(a))U) \leqslant t) = P(F(a) + (1 - F(a))U \leqslant F(t))$$

ce qui conduit à

$$F_T(t) = P\left(U \leqslant \frac{F(t) - F(a)}{1 - F(a)}\right) = \frac{F(t) - F(a)}{1 - F(a)} = \frac{P(a < X \leqslant t)}{P(X > a)} = P(X \leqslant t/X > a)$$

c'est-à-dire que $T \sim$ loi de $X/X > a$
Ceci permet de simuler la loi de X conditionnellement à $X > a$ très simplement

$$U \sim \mathcal{U}([0, 1]) \Rightarrow T = F^{-1}(F(a) + (1 - F(a))U) \sim \text{ loi de } X/X > a$$

Cette méthode est bien plus efficace que la méthode de rejet précédente, puisqu'on ne rejettent rien et qu'elle fonctionne quel que soit a. Elle nécessite cependant la connaissance et l'inversion de F, contrairement à la méthode de rejet, qui n'exigeait que la capacité à simuler suivant la loi de X.
3. Elle fonctionne, par exemple, très bien pour une loi exponentielle

$$F^{-1}(u) = -\ln(1 - u) \Rightarrow T = a - \ln(1 - U)$$

Puisqu'on sait que la variable $-\ln(1 - U) \sim \mathcal{E}xp(1)$, ceci revient simplement à appliquer une translation de a sur une loi exponentielle : Soit $E \sim \mathcal{E}xp(1)$, alors $T = a + E$ vérifie bien (loi de T)$\equiv$(loi de $(E/E > a)$).Ceci est bien entendu propre à la loi exponentielle et dû à se propriété d'absence de mémoire.