Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan

Année universitaire : 2019/2020
S.M.A. Semestre 6

T.D. de Probabilités 2
Corrigés de la série n° 4

Exercice 1 :
On a $G(s) = \sum_{n\geqslant 0} p_n s^n$, pour $|s| \leqslant 1$.
$Q(s) = \sum_{n\geqslant 0} q_n s^n$; qui existe pour tout $|s| < 1$
$0 < q_n \leqslant 1$

1. $(1-s)Q(s) = \left(\sum_{n\geqslant 0} q_n s^n\right)(1-s)$
   $= \sum_{n\geqslant 0} q_n s^n - \left(\sum_{n\geqslant 0} q_n s^n\right) s$
   $= \sum_{n\geqslant 0} q_n s^n - \sum_{n\geqslant 0} q_n s^{n+1}$
   $= \sum_{n\geqslant 0} q_{n+1} s^{n+1} - \sum_{n\geqslant 0} q_n s^{n+1} + q_0$
   $= \sum_{n\geqslant 0}(q_{n+1} - q_n) s^{n+1} + q_0$
   $q_{n+1} - q_n = P(X > n+1) - P(X > n)$
   $= -P(n < X \leqslant n+1) = -P(X = n+1) = -p_{n+1}$
   $(1-s)Q(s) = q_0 - \sum_{n\geqslant 0} p_{n+1} s^{n+1} = 1 - G(s)$, (car $q_0 = 1 - p_0$).
2. $E(X) = G'(1)$
   $1 - (1-s)Q(s) = G(s)$
   $G'(s) = -(1-s)Q'(s) + Q(s) \Rightarrow E(X) = Q(1)$
   $G''(s) = -(1-s)Q''(s) + 2Q'(s) \Rightarrow G''(1) = 2Q'(1)$
   $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2 - X) + E(X) - E(X)^2$
   $= G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$
   $Var(X) = 2Q'(1) + Q(1) - [Q(1)]^2$

Exercice 2 :
Trouvons la fonction génératrice des moments sachant que les moments de la distribution sont données par $m_n = \frac{1}{n+1}$.
On sait que $M(s) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{s^n}{n!}$
Donc $M(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{(n+1)!}$
$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} = \frac{1}{s}(e^s - 1)$.

Exercice 3 :

1. Soit la fonction de densité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

   $\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$
   $= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{1}{(b-a)it}[e^{itx}]_a^b$

$= \frac{e^{itb}-e^{ita}}{(b-a)it} = \frac{1}{(b-a)it}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}(b^k - a^k)$
$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^{k-1}}{k!}\frac{b^k-a^k}{b-a} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{b^k-a^k}{(b-a)k}$
$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$
Donc $m_n = E(X^n) = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$
$M(s) = E(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{sx}dx$
$= \frac{e^{sb}-e^{sa}}{s(b-a)} = \frac{1}{s(b-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}(b^k - a^k)$
$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\frac{b^k-a^k}{(b-a)k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$
On retrouve, ainsi, $m_n = E(X^n) = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$
$\mu_k = E\left((X - E(X))^k\right)$
$= E\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j(-1)^j\,(E(X))^j\,X^{k-j}\right)$
$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j(-1)^j m_1^j m_{k-j}$.

2. Pour $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$
$M(s) = E(e^{sX})$, pour $|s| < 1$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} s^{sx}g(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{x(s-1)}dx = \frac{1}{s-1}[e^{x(s-1)}]_0^{+\infty}$
$M(s) = \frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}n!$
Donc $m_n = n!$.
$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}g(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{x(it-1)}dx$
$= \frac{1}{it-1}[e^{x(it-1)}]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-it} = \frac{1+it}{1+t^2}$
$= \frac{1}{1+t^2} + i\frac{t}{1+t^2}$.
pour $|t| \leqslant 1$, on a : $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$
et $\frac{t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1)!$
$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^{2n}(2n)!}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1)! = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}n!$
Même d'après le cours on a : $\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}m_n = \sum_{n=0}^{\infty}(it)^n$

Exercice 4 :
Considérons la fonction $\varphi_X(t) = e^{-|t|}, \forall t \in \mathbb{R}$. Comme cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est la fonction caractéristique d'une v.a.r. X de densité f, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-itx+t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-itx-t}dt$
$= \left[\frac{e^{(1-ix)t}}{2\pi(1-ix)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-e^{(1+ix)t}}{2\pi(1+ix)}\right]_0^{+\infty}$
$= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} = \frac{1-ix+1+ix}{2\pi(1-ix)(1+ix)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
Donc X suit une loi de Cauchy et φ_X est la fonction caractéristique associée à une loi de Cauchy.

Exercice 5 :

1. Sa fonction de densité est : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$; $-\infty < x < \infty$; $-\infty < \mu < \infty$; $\sigma > 0$.
Sa fonction caractéristique est : $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(itx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$
$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-\mu-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + it\mu - \frac{\sigma^2t^2}{2}\right)dx$
$= \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$

D'où $E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \mu$; $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$.
Les moments centrées d'ordre impair sont tous nuls.
Les moments centrées d'ordre pair sont :
$E(X-\mu)^{2n} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$; $(n \in \mathbb{Z}^+)$
$= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} 2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma(n+\frac{1}{2})$
$= [(2n-1)(2n-3)\cdots 3.1]\sigma^2$

2. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
On a : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$; $-\infty < x < \infty$.
Donc : $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2 - \frac{t^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$
et par conséquent :
$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{2k!} \frac{(2k)!}{2^k k!}$
D'où $m_{2k+1} = 0$; pour $k = 0, 1, 2, \cdots$
$m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$; pour $k = 0, 1, 2, \cdots$
Retrouvons les moments d'une v.a. normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
Soit X v.a. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Donc $m_n(Y) = E(Y^n) = \frac{1}{\sigma^n} E(X-\mu)^n = \frac{1}{\sigma^n}\mu_n(X)$
D'où $\mu_n(X) = \sigma^n m_n(Y)$
D'après ce qui précède, on a : $\mu_{2k+1} = \sigma^{2k+1} m_{2k+1}(Y) = 0$, $k = 0, 1, 2, \cdots$
$\mu_{2k}(X) = \sigma^{2k} m_{2k}(Y) = \sigma^{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}$; $k = 0, 1, 2, \cdots$

Exercice 6 :
On remarque que $\overline{\varphi_X(t)} = \overline{E[e^{itX}]} = E[e^{-itX}] = \varphi_{-X}(t)$.
Donc $\varphi_X(t)$ est réelle si, et seulement si, $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si la loi de X est symétrique.

Exercice 7 :

1. Soit X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$; alors
$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = (1-p) + pe^{it}.$$
2. Soit X qui suit une loi Binomiale de paramètres (n, p) ; alors on peut écrire $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ où les Y_n sont des variables de Bernoulli de paramètre p, indépendantes. Donc
$$\varphi_X(t) = E(e^{it(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)}) = (E(e^{itY_1}))^n = [(1-p) + pe^{it}]^n$$
3. Soit X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ ; alors
$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}.$$

4. Soit X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$; alors

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

5. Soit X qui suit une loi exponentielle symétrique de paramètre λ (i.e. de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$) ; alors, de même,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda - it} + \frac{1}{\lambda + it}\right) = \frac{\lambda^2}{t^2 + \lambda^2}$$

6. Soit X qui suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si X a pour densité $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$. Avec la question précèdente, et en utilisant la formule d'inversion (de réciprocité) de Fourier (on a $\varphi_Y(t) = \hat{f}(t)$), on obtient que :

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{ity}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\frac{\lambda^2}{t^2 + \lambda^2}dt = \frac{\lambda}{2}E[e^{-iyX}]$$

Comme X est symétrique, on a (voir exercice 6) $E[e^{iyX}] = E[e^{-iyX}] = f(y)$.
On a donc, si $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$, $\phi_X(y) = e^{-\lambda|y|}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 :

1. Pour appliquer la formule de réciprocité de Fourier, il faut que φ_1 soit absolument intégrable. Mais, elle ne l'est pas. Pour cela, on applique une autre méthode.
On remarque que : $\varphi_1(t) = \exp\left(e^{it} - 1\right)$, nous permet de dire que $X \sim \mathcal{P}(1)$, car

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big)$$

2. De même, $\varphi_2(t) = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^4$, veut dire qu'il s'agit de la loi binomiale $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$, car

$$X \sim \mathcal{B}(n,p) \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \big(pe^{it} + (1-p)\big)^n$$

Exercice 9 :

1. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, indépendantes,alors

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \big(pe^{it} + (1-p)\big)^n \big(pe^{it} + (1-p)\big)^m = \big(pe^{it} + (1-p)\big)^{n+m}$$

et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes, alors

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)},$$

et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
3. Soit $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, indépendantes, alors

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{itm_1 - \sigma_1^2t^2/2}e^{itm_2 - \sigma_2^2t^2/2} = e^{it(m_1+m_2) - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$$

et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

4. Soit X et Y ont pour densités respectives f_X et f_Y, alors

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{itx}dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)e^{itv}dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{it(x+v)}dx \right) dv$$

On procède au changement de variable $u = x + v$;

$$\varphi_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)e^{itu}du \right) dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v) f_X(u-v)dv \right) du$$

On peut permuter les intégrales sans problème grâce au théorème de Fubini.
Puisque la fonction caractéristique caractérise la loi de la v.a., on a donc pour $X+Y$ la densité
$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)f_X(u-v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)f_Y(u-v)dv$