Université Abdelmalek Essaâdi **Année universitaire : 2019/2020**
Faculté des Sciences de Tétouan **S.M.A. Semestre 6**

Contrôle de Probabilités 2 (Durée: 1h)

Faites deux exercices, aux choix, parmi les trois exercices suivants :

Exercice 1 : (10 points)
Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements associés à un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On a :

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geqslant 1}(\bigcap_{k\geqslant n} A_k) \in \mathcal{A}$$

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\geqslant 1}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) \in \mathcal{A}$$

1. Montrer que :
   (a) $P(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n P(A_n)$
   [On rappelle que la suite d'événements $(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)_n$ est une suite croissante]
   (b) $\limsup_n P(A_n) \leqslant P(\limsup_n A_n)$
   [On rappelle que la suite d'événements $(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)_n$ est une suite décroissante]
2. Soit $B \subset \Omega$, montrer que :
   (a) $B - \liminf_n A_n = \limsup_n (B - A_n)$
   (b) $B - \limsup_n A_n = \liminf_n (B - A_n)$

Exercice 2 : (10 points)
Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, telles que chaque X_i a une fonction de répartition F_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
Soient les variables aléatoitres $m_n = \min_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i)$ et $M_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i)$.

1. Montrer que la fonction de répartition de M_n en x est $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} F_i(x)$.
2. Montrer que la fonction de répartition de m_n est $1 - \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(1 - F_i(x))$.
3. Montrer que $P(x_1 < m_n \leqslant M_n \leqslant x_2) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(F_i(x_2) - F_i(x_1))$

<u>Indication :</u> $\{M_n \leqslant x\} = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \{X_i \leqslant x\}$

Exercice 3 : (10 points)

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer sa fonction caractéristique φ_X.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma > 0$, $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Calculer sa fonction caractéristique φ_Y et retrouver, à partir de φ_Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et sa variance $Var(Y)$.
3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent, respectivement les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Montrer que la variable aléatoire somme $X_1 + X_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Bonne Chance !